



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№6/2009

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ
МАТЕРИАЛЫ



Приложение к журналу

«КВАНТ»

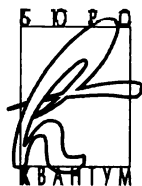
№6/2009

**Экзаменационные
материалы
по математике
и физике**

Составители

А.А.Егоров, С.А.Дориченко,

В.А.Тихомирова



Москва

2009

УДК 373.167.1:[51+53]
ББК 22.1я721+22.3я721
Э36

Приложение
к журналу «Квант»
№6/2009



Э36 Экзаменационные материалы по математике и физике /
Составители А.А.Егоров, С.А.Дориченко, В.А.Тихомирова. –
М.: Бюро Квантум, 2009. – 208 с. (Приложение к журналу
«Квант» №6/2009.)

ISBN 978-5-85843-096-4

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), задачи олимпиад и материалы вступительных экзаменов в различные вузы страны в 2009 году.

Для старшеклассников и выпускников средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ББК 22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-85843-096-4

© Бюро Квантум, 2009

Предисловие		4
	Задачи	Ответы
ЕГЭ-2010 по физике	5	96
Олимпиада «Покори Воробьевы горы»	24	102
Олимпиада «Ломоносов-2009»	33	135
Государственный университет – Высшая школа экономики	38	140
Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ	43	145
Московский государственный институт электронной техники (технический университет)	53	149
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана	56	150
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова	65	165
Московский инженерно-физический институт	69	171
Московский физико-технический институт	72	177
Новосибирский государственный университет	78	193
Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина	83	201
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	88	204

В этом приложении к журналу «Квант» традиционно собраны материалы вступительных испытаний по математике и физике в вузы нашей страны за прошедший 2009 год.

Мы предлагаем школьникам и преподавателям как избранные варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и задачи различных олимпиад, имеющих статус «вступительных». Победители и призеры таких олимпиад, включенных в федеральный список данного года, имеют право быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по конкретному предмету, при поступлении в любой вуз. (Отметим, что это не освобождает учащихся от сдачи ЕГЭ.) Кроме того, в сборнике представлены материалы вступительных испытаний в традиционной форме, в которых, в частности, могут участвовать абитуриенты, по каким-либо причинам освобожденные от сдачи ЕГЭ.

Мы надеемся, что предлагаемые вашему вниманию материалы будут полезны как для самостоятельной подготовки к экзаменам, так и для использования на уроках, факультативах, кружках, подготовительных курсах.

Желаем успехов!

ЕГЭ–2010 ПО ФИЗИКЕ

Варианты ЕГЭ по физике 2010 года будут иметь такую же структуру, как и варианты 2009 года: меньше задач группы А с выбором одного из вариантов ответа (25 вместо 30), из задач группы В (задачи с кратким ответом) первые две также содержат варианты ответов, но на несколько вопросов, задача С1 представляет собой качественный вопрос, на который надо дать развернутый ответ с обоснованием.

Для помощи в подготовке к экзамену мы предлагаем вам два варианта из открытого сегмента вариантов 2009 года с ответами и решениями избранных задач. Первый вариант мы приводим полностью, со всеми таблицами и указаниями по оформлению, а второй вариант даем в сокращенном виде – только условия задач (таблицы и указания можно взять из первого варианта).

Вариант 1

Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3,5 часа (210 минут). Работа состоит из 3 частей, включающих 36 заданий.

Часть 1 содержит 25 заданий (А1–А25). К каждому заданию дается 4 варианта ответа, из которых правильный только один.

Часть 2 содержит 5 заданий (В1–В5), на которые следует дать краткий ответ. Для заданий В1 и В2 ответ необходимо записать в виде набора цифр, а для заданий В3–В5 – в виде числа.

Часть 3 состоит из 6 заданий (С1–С6), на которые требуется дать развернутый ответ.

При выполнении заданий В3–В5 части 2 значение искомой величины следует выразить в тех единицах физических величин, которые указаны в условии задания. Если такого указания нет, то значение величины следует записать в Международной системе единиц (СИ). При вычислении разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Внимательно прочитайте каждое задание и предлагаемые варианты ответа, если они имеются. Отвечайте только после того, как вы поняли вопрос и проанализировали все варианты ответа.

Выполняйте задания в том порядке, в котором они даны. Если какое-то задание вызывает у вас затруднение, пропустите его. К пропущенным заданиям можно будет вернуться, если у вас останется время.

За выполнение различных по сложности заданий дается один или более баллов. Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться вам при выполнении работы.

Десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9	санти	с	10^{-2}
мега	М	10^6	милли	м	10^{-3}
кило	к	10^3	микро	мк	10^{-6}
гекто	г	10^2	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}	пико	п	10^{-12}

Константы

число π

$$\pi = 3,14$$

ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

(элементарный электрический заряд)

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

постоянная Планка

Соотношение между различными единицами

температура	$0 \text{ K} = -273 \text{ }^{\circ}\text{C}$
атомная единица массы	$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
атомная единица массы эквивалентна	$931,5 \text{ МэВ}$
1 электронвольт	$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Масса частиц

электрона	$9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$
протона	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,007 \text{ а.е.м.}$
нейтрона	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,008 \text{ а.е.м.}$

Плотность

древесины (сосна)	400 кг/м^3	алюминия	2700 кг/м^3
керосина	800 кг/м^3	железа	7800 кг/м^3
подсолнечного масла	900 кг/м^3	ртути	13600 кг/м^3
воды	1000 кг/м^3		

Удельная теплоемкость

воды	$4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$	алюминия	$900 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$
льда	$2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$	меди	$380 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$
железа	$640 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$	чугуна	$500 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$
свинца	$130 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$		

Удельная теплота

парообразования воды	$2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$
плавления свинца	$2,5 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$
плавления льда	$3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$

Нормальные условия: давление 10^5 Па , температура $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Молярная масса

азота	$28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	кислорода	$32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
аргона	$40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	лития	$6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
водорода	$2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	молибдена	$96 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
воздуха	$29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	неона	$20 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
гелия	$4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

Часть 1

При выполнении заданий части 1 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого вами задания (A1–A25) поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

A1. Тело движется по оси Ox . На графике (рис.1) показана зависимость проекции скорости тела на ось Ox от времени. Каков путь, пройденный телом к моменту времени $t = 4$ с?

- 1) 6 м; 2) 8 м; 3) 4 м; 4) 5 м.

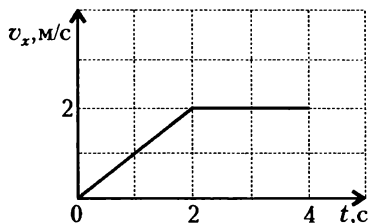


Рис. 1

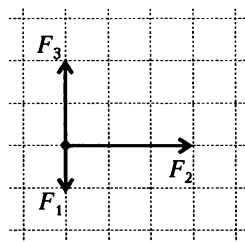


Рис. 2

A2. На тело, находящееся на горизонтальной плоскости, действуют 3 горизонтальные силы (рис.2). Каков модуль равнодействующей этих сил, если $F_1 = 1$ Н?

- 1) $\sqrt{10}$ Н; 2) 6 Н; 3) 4 Н; 4) $\sqrt{13}$ Н.

A3. Под действием силы 3 Н пружина удлинилась на 4 см. Чему равен модуль силы, под действием которой удлинение этой пружины составит 6 см?

- 1) 3,5 Н; 2) 4 Н; 3) 4,5 Н; 4) 5 Н.

A4. Тело движется по прямой в одном направлении. Под действием постоянной силы за 3 с импульс тела изменился на 6 кг·м/с. Каков модуль силы?

- 1) 0,5 Н; 2) 2 Н; 3) 9 Н; 4) 18 Н.

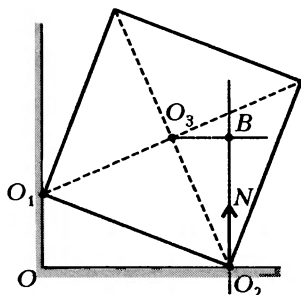


Рис. 3

A5. Период колебаний потенциальной энергии пружинного маятника 1 с. Каким будет период ее колебаний, если массу груза маятника увеличить в 2 раза, а жесткость пружины вдвое уменьшить?

- 1) 4 с; 2) 8 с; 3) 2 с; 4) 6 с.

A6. Однородный куб опирается одним ребром на пол, другим — на вертикальную стену (рис.3). Плечо силы упругости \vec{N} относительно оси,

проходящей через точку O_3 перпендикулярно плоскости рисунка, равно:

- 1) 0; 2) O_2O_3 ; 3) O_2B ; 4) O_3B .

A7. Одинаковые бруски, связанные нитью, движутся под действием внешней силы F по гладкой горизонтальной поверхности (рис.4). Как изменится сила натяжения нити T , если третий брусок переложить с первого на второй?

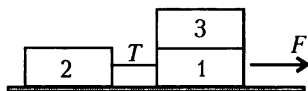


Рис. 4

- 1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 3 раза; 3) уменьшится в 1,5 раза; 4) уменьшится в 2 раза.

A8. Какова температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении по абсолютной шкале температур?

- 1) 100 К; 2) 173 К; 3) 273 К; 4) 373 К.

A9. На рисунке 5 представлены графики процессов, проводимых с постоянным количеством идеального газа. Какой из изопроцессов изображает график 1?

- 1) Адиабату; 2) изотерму; 3) изобару; 4) изохору.

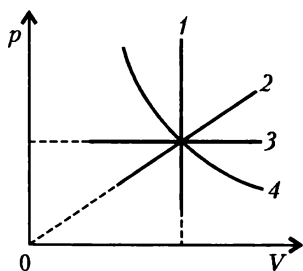


Рис. 5

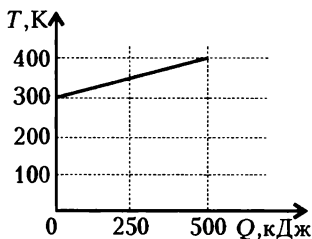


Рис. 6

A10. На рисунке 6 приведена зависимость температуры твердого тела от полученного им количества теплоты. Масса тела 2 кг. Какова удельная теплоемкость вещества этого тела?

- 1) 25 Дж/(кг · К);
2) 625 Дж/(кг · К);
3) 2500 Дж/(кг · К);
4) 1000 Дж/(кг · К).

A11. На рисунке 7 показано, как менялось давление идеального газа в зависимости от его объема при переходе из состояния 1 в состояние 2, а затем в состояние 3. Каково отноше-

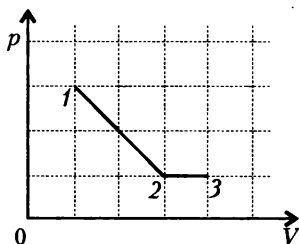


Рис. 7

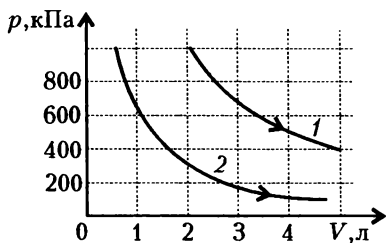


Рис. 8

1) оба процесса идут при одной и той же температуре; 2) в процессе 1 газ начал расширяться позже, чем в процессе 2; 3) процесс 1 идет при более высокой температуре; 4) процесс 2 идет при более высокой температуре.

A13. Как направлена кулоновская сила F , действующая на положительный точечный заряд $2q$, помещенный в центр квадрата (рис.9), в вершинах которого находятся заряды: $+q, +q, -q, -q$?

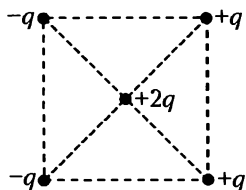


Рис. 9

1) \rightarrow ; 2) \leftarrow ; 3) \uparrow ; 4) \downarrow .

A14. На фотографии (рис.10) – электрическая цепь. Показания вольтметра даны в вольтах. Чему будут равны показания вольтметра, если его подключить параллельно резистору сопротивлением 2 Ом? Вольтметр считать идеальным.

1) 0,3 В; 2) 0,6 В; 3) 1,2 В; 4) 1,8 В.

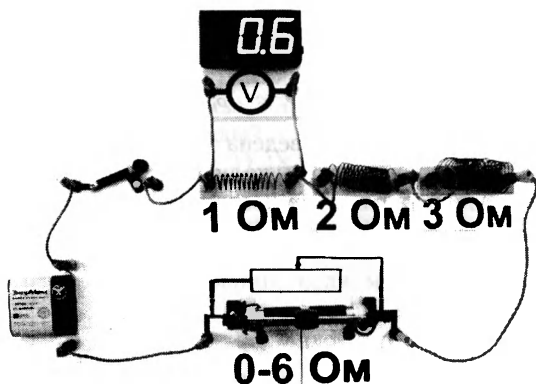


Рис. 10

A15. На рисунке 11 изображен длинный цилиндрический проводник, по которому протекает электрический ток. Направ-

ление тока указано стрелкой. Как направлен вектор магнитной индукции поля этого тока в точке C ?

1) В плоскости чертежа вверх \uparrow ; 2) в плоскости чертежа вниз \downarrow ; 3) от нас перпендикулярно плоскости чертежа \otimes ; 4) к нам перпендикулярно плоскости чертежа \odot .



Рис. 11

А16. В наборе радиодеталей для изготовления простого колебательного контура имеются две катушки с индуктивностями $L_1 = 1$ мкГн и $L_2 = 2$ мкГн, а также два конденсатора, емкости которых $C_1 = 30$ пФ и $C_2 = 40$ пФ. При каком выборе двух элементов из этого набора частота собственных колебаний контура ν будет наибольшей?

1) L_1 и C_1 ; 2) L_1 и C_2 ; 3) L_2 и C_2 ; 4) L_2 и C_1 .

А17. От точечного источника света S , находящегося на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $2F$ от нее, распространяются два луча a и b , как показано на рисунке 12. После преломления линзой эти лучи пересекутся в точке:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

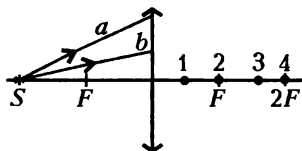


Рис. 12

А18. Ученик выполнил задание: «Нарисовать ход луча света, падающего из воздуха перпендикулярно поверхности стеклянной призмы треугольного сечения» (рис.13). При построении он:

1) ошибся при изображении хода луча только при переходе из воздуха в стекло;

2) правильно изобразил ход луча на обеих границах раздела сред;

3) ошибся при изображении хода луча на обеих границах раздела сред;

4) ошибся при изображении хода луча только при переходе из стекла в воздух.

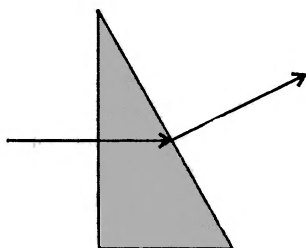


Рис. 13

А19. В цепи постоянного тока, показанной на рисунке 14, необходимо изменить сопротивление второго реостата (R_2) с таким расчетом, чтобы мощность, выделяющаяся на нем, увеличилась вдвое. Мощность на первом реостате (R_1) должна остаться при этом неизмен-

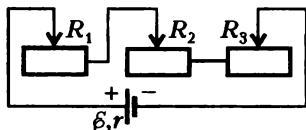


Рис. 14

ной. Как этого добиться, изменив сопротивление второго (R_2) и третьего (R_3) реостатов? Начальные значения сопротивлений реостатов $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$ и $R_3 = 6 \text{ Ом}$.

- 1) $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$;
- 2) $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$;
- 3) $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$;
- 4) $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 7 \text{ Ом}$.

A20. На рисунке 15 приведены фрагмент спектра поглощения неизвестного разреженного атомарного газа (в середине), спектры поглощения атомов водорода (вверху) и гелия (внизу). По анализу спектров можно заключить, что в химический состав газа входят атомы:

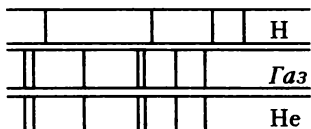


Рис. 15

- 1) только водорода;
- 2) водорода и гелия;

- 3) только гелия;
- 4) водорода, гелия и еще какого-то вещества.

A21. Период полураспада радиоактивного изотопа кальция $^{45}_{20}\text{Ca}$ составляет 164 суток. Если изначально было $4 \cdot 10^{24}$ атомов $^{45}_{20}\text{Ca}$, то примерно сколько их будет через 328 суток?

- 1) $2 \cdot 10^{24}$; 2) $1 \cdot 10^{24}$; 3) $1 \cdot 10^6$; 4) 0.

A22. Какая частица X участвует в реакции $^{19}_9\text{F} + X \rightarrow ^4_2\text{He} + ^{16}_8\text{O}$?

- 1) Протон; 2) нейтрон; 3) электрон; 4) α -частица.

A23. Поток фотонов с энергией 15 эВ выбивает из металла фотоэлектроны, максимальная кинетическая энергия которых в 2 раза меньше работы выхода. Какова максимальная кинетическая энергия образовавшихся фотоэлектронов?

- 1) 30 эВ; 2) 15 эВ; 3) 10 эВ; 4) 5 эВ.

A24. Ученик изучал в школьной лаборатории колебания математического маятника. Результаты измерений каких величин дадут ему возможность рассчитать период колебаний маятника?

- 1) Массы маятника m и знание табличного значения ускорения свободного падения g ;
- 2) длины нити маятника l и знание табличного значения ускорения свободного падения g ;
- 3) амплитуды колебаний маятника A и его массы m ;
- 4) амплитуды колебаний маятника A и знание табличного значения ускорения свободного падения g .

A25. Шарик уронили в воду с некоторой высоты. На рисунке

16 показан график изменения координаты шарика с течением времени. Согласно графику:

1) шарик все время двигался с постоянным ускорением;

2) ускорение шарика увеличивалось в течение всего времени движения;

3) первые 3 с шарик двигался с постоянной скоростью;

4) после 3 с шарик двигался с постоянной скоростью.

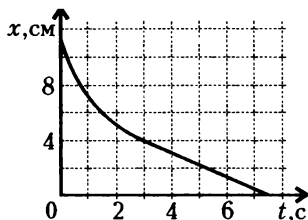


Рис. 16

Часть 2

В заданиях В1–В2 требуется указать последовательность цифр, соответствующих правильному ответу. К каждой позиции первого столбца подберите нужную позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами. Получившуюся последовательность следует записать сначала в текст экзаменационной работы, а затем перенести в бланк ответов № 1 без пробелов и других символов. (Цифры в ответе могут повторяться.)

В1. В сосуде неизменного объема находилась при комнатной температуре смесь двух идеальных газов, по 1 молю каждого. Половину содержимого сосуда выпустили, а затем добавили в сосуд 1 моль первого газа. Как изменились в результате парциальные давления газов и их суммарное давление, если температура газов в сосуде поддерживалась неизменной?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ

А) парциальное давление первого газа

1) увеличилось

Б) парциальное давление второго газа

2) уменьшилось

В) давление смеси газов в сосуде

3) не изменилось

А	Б	В

В2. Источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r сначала был замкнут на внешнее сопротивление R (рис. 17). Затем внешнее сопротивление увеличили. Как при этом изменятся сила тока в цепи и напряжение на внешнем сопротивлении?

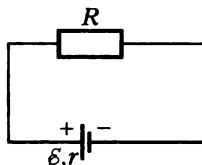


Рис. 17

Установите соответствие между физическими величинами этого процесса и характером их изменения. К каждой позиции первого столбца подберите нужную позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

- А) сила тока
Б) напряжение на внешнем сопротивлении

ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ

- 1) увеличится
2) уменьшится
3) не изменится

А	Б

Ответом к каждому заданию этой части будет некоторое число. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера задания (В3–В5), начиная с первой клеточки. Каждый символ (цифру, запятую, знак «минус») пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы физических величин писать не нужно.

В3. Материальная точка, двигаясь равноускоренно по прямой, за время t увеличила скорость в 3 раза, пройдя путь 20 м. Найдите t , если ускорение точки равно 5 м/с^2 .

В4. В калориметре находится вода, масса которой 100 г и температура 0°C . В него добавляют кусок льда, масса которого 20 г и температура -5°C . Какой будет температура содержимого калориметра после установления в нем теплового равновесия? Ответ выразите в градусах Цельсия ($^\circ\text{C}$).

В5. Дифракционная решетка, имеющая 750 штрихов на 1 см, расположена параллельно экрану на расстоянии 1,5 м от него. На решетку перпендикулярно ее плоскости направляют пучок света. Определите длину волны света, если расстояние на экране между вторыми максимумами, расположенными слева и справа от центрального (нулевого), равно 22,5 см. Ответ выразите в микрометрах (мкм) и округлите до десятых. Считать $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1.

Часть 3

Задания С1–С6 представляют собой задачи, полное решение которых необходимо записать в бланке ответов № 2. Рекомендуется провести предварительное решение на черновике. При оформлении решения в бланке ответов № 2 запишите сначала номер задания (С1 и т.д.), а затем решение соответствующей задачи.

В задаче С1 следует записать развернутый ответ, поясняющий физические процессы, описанные в задаче, и ход ваших рассуждений.

С1. В цилиндрическом сосуде под поршнем длительное время находятся вода и ее пар. Поршень начинают вдвигать в сосуд. При этом температура воды и пара остается неизменной. Как будет меняться при этом масса жидкости в сосуде? Ответ поясните.

Полное правильное решение каждой из задач С2–С6 должно включать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и, при необходимости, рисунок, поясняющий решение.

С2. На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска массой $M = 2$ кг (рис.18). По доске скользит шайба массой $m = 0,5$ кг. Коэффициент трения между шайбой и доской $\mu = 0,2$. В начальный момент времени скорость шайбы $v_0 = 2$ м/с, а доска покоится. Сколько времени потребуется для того, чтобы шайба перестала скользить по доске?

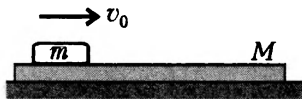


Рис. 18

С3. Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 3 в соответствии с графиком зависимости его объема V от температуры T (рис.19; $T_0 = 100$ К). На участке 2–3 к газу

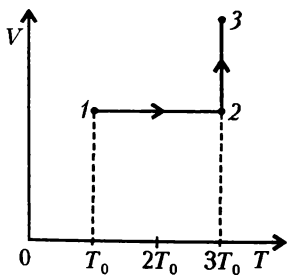


Рис. 19

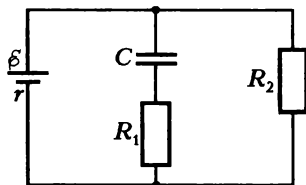


Рис. 20

подводят $2,5$ кДж тепла. Найдите отношение работы газа A_{123} ко всему подведенному к газу количеству теплоты Q_{123} .

С4. Напряженность электрического поля плоского конденсатора (рис.20) равна 24 кВ/м. Внутреннее сопротивление источника $r = 10$ Ом, ЭДС $\varepsilon = 30$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом. Найдите расстояние между пластинами конденсатора.

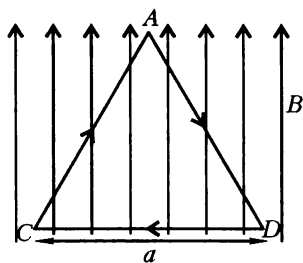


Рис. 21

Каким должен быть модуль индукции магнитного поля, чтобы рамка начала поворачиваться вокруг стороны CD , если масса рамки m ?

С6. В двух опытах по фотоэффекту металлическая пластинка облучалась светом с длинами волн $\lambda_1 = 350$ нм и $\lambda_2 = 540$ нм соответственно. В этих опытах максимальные скорости фотоэлектронов отличались в $\frac{v_1}{v_2} = 2$ раза. Какова работа выхода с поверхности металла?

Вариант 2

Часть 1

A1. Мотоциклист и велосипедист одновременно начинают движение из состояния покоя. Ускорение мотоциклиста в три раза больше, чем велосипедиста. Во сколько раз большую скорость разовьет мотоциклист за то же время?

1) В 1,5 раза; 2) в $\sqrt{3}$ раза; 3) в 3 раза; 4) в 9 раз.

A2. Скорость автомобиля массой 1000 кг, движущегося вдоль оси Ox , изменяется со временем в соответствии с графиком (рис.22). Систему отсчета считать инерциальной. Равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, равна:

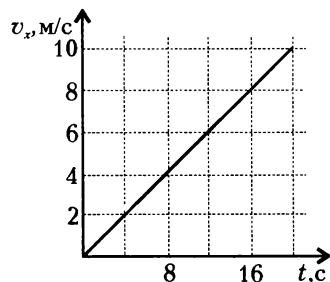


Рис. 22

1) 500 Н; 2) 1000 Н;
3) 10000 Н; 4) 20000 Н.

A3. На рисунке 23 изображен лабораторный динамометр. Шкала проградуирована в ньютонах. Каким будет растяжение пружины динамометра, если к ней подвесить груз 200 г?

1) 5 см; 2) 2,5 см; 3) 3,5 см; 4) 3,75 см.

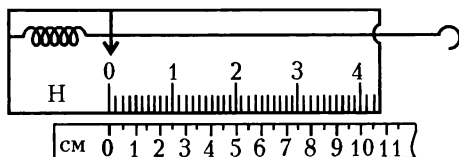


Рис 23

A4. Охотник массой 60 кг, стоящий на гладком льду, стреляет из ружья в горизонтальном направлении. Масса заряда 0,03 кг. Скорость дробинки при выстреле 300 м/с. Какова скорость охотника после выстрела?

- 1) 0,1 м/с; 2) 0,15 м/с; 3) 0,3 м/с; 4) 3 м/с.

A5. Лебедка равномерно поднимает груз массой 200 кг на высоту 3 м за 5 с. Какова мощность двигателя лебедки?

- 1) 120 Вт; 2) 3000 Вт; 3) 333 Вт; 4) 1200 Вт.

A6. Как изменится период малых колебаний математического маятника, если его длину увеличить в 4 раза?

- 1) Увеличится в 4 раза;
2) увеличится в 2 раза;
3) уменьшится в 4 раза;
4) уменьшится в 2 раза.

A7. На горизонтальном полу стоит ящик массой 10 кг. Коэффициент трения между полом и ящиком равен 0,25. К ящику в горизонтальном направлении прикладывают силу 16 Н, и он остается в покое. Какова сила трения между ящиком и полом?

- 1) 0 Н; 2) 2,5 Н; 3) 25 Н; 4) 16 Н.

A8. Как изменится давление идеального газа, если среднюю кинетическую энергию теплового движения молекул газа уменьшить в 2 раза и концентрацию молекул газа уменьшить в 2 раза?

- 1) Увеличится в 4 раза;
2) уменьшится в 2 раза;
3) уменьшится в 4 раза;
4) не изменится.

A9. Удельная теплота парообразования воды равна $2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Это означает, что для испарения:

- 1) любой массы воды при температуре кипения необходимо количество теплоты $2,3 \cdot 10^6$ Дж;
2) 1 кг воды при температуре кипения необходимо количество теплоты $2,3 \cdot 10^6$ Дж;
3) 2,3 кг воды при температуре кипения необходимо количество теплоты 10^6 Дж;

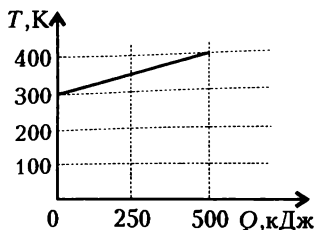


Рис. 24

4) 1 кг воды при любой температуре необходимо количество теплоты $2,3 \cdot 10^6$ Дж.

A10. На рисунке 24 приведена зависимость температуры твердого тела от полученного им количества теплоты. Масса тела 2 кг. Какова удельная теплоемкость вещества этого тела?

- 1) 25 Дж/(кг · К);
- 2) 625 Дж/(кг · К);
- 3) 2500 Дж/(кг · К);
- 4) 1000 Дж/(кг · К).

A11. Внешние силы совершили над идеальным газом работу 300 Дж, и при этом внутренняя энергия газа увеличилась на 500 Дж. В этом процессе газ:

- 1) отдал количество теплоты 100 Дж;
- 2) получил количество теплоты 200 Дж;
- 3) отдал количество теплоты 400 Дж;
- 4) получил количество теплоты 400 Дж.

A12. На VT -диаграмме (рис.25) представлена зависимость объема идеального газа постоянной массы от абсолютной температуры. Как изменяется давление в процессе 1–2–3?

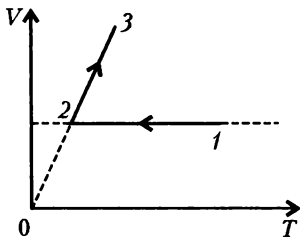


Рис. 25

- 1) На участках 1–2 и 2–3 увеличивается;
- 2) на участках 1–2 и 2–3 уменьшается;
- 3) на участке 1–2 уменьшается, на участке 2–3 остается неизменным;
- 4) на участке 1–2 не изменяется, на участке 2–3 увеличивается.

A13. Расстояние между двумя точечными электрическими зарядами увеличили в 3 раза, а один из зарядов уменьшили в 3 раза. Сила электрического взаимодействия между ними:

- 1) не изменилась;
- 2) уменьшилась в 3 раза;
- 3) увеличилась в 3 раза;
- 4) уменьшилась в 27 раз.

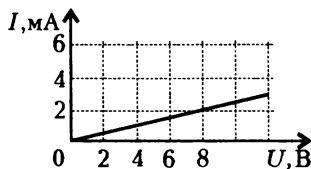


Рис. 26

A14. На рисунке 26 изображен график зависимости силы тока в проводнике от напряжения между его концами. Чему равно сопротивление

проводника?

- 1) 0,25 кОм; 2) 2 кОм; 3) 4 кОм; 4) 8 кОм.

A15. Протон p , влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет скорость \vec{v} , перпендикулярную вектору индукции \vec{B} магнитного поля, направленному вертикально (рис.27). Куда направлена действующая на него сила Лоренца \vec{F} ?

- 1) От наблюдателя \otimes ;
2) к наблюдателю \odot ;
3) горизонтально вправо \rightarrow ;
4) вертикально вниз \downarrow .

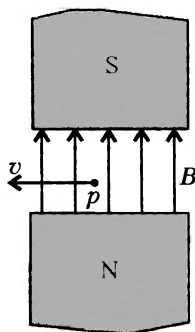


Рис. 27

A16. Колебательный контур состоит из конденсатора электроемкостью C и катушки индуктивностью L . Как изменится период свободных электромагнитных колебаний в этом контуре, если и электроемкость конденсатора, и индуктивность катушки увеличить в 2 раза?

- 1) Не изменится;
2) увеличится в 4 раза;
3) уменьшится в 2 раза;
4) увеличится в 2 раза.

A17. На рисунке 28 показан ход лучей от точечного источника света A через тонкую линзу. Оптическая сила линзы приблизительно равна:

- 1) 17 дптр; 2) 10 дптр; 3) 8 дптр; 4) -8 дптр.

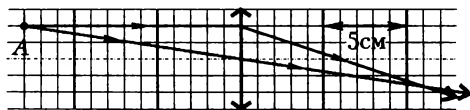


Рис. 28

A18. В инерциальной системе отсчета свет от неподвижного источника распространяется со скоростью c . Источник света движется в этой системе со скоростью v , а зеркало — со скоростью u в противоположную сторону (рис.29). С какой скоростью распространяется свет, отраженный от зеркала?

- 1) $c - v$; 2) $c + v + u$; 3) $c + v$;
4) c .

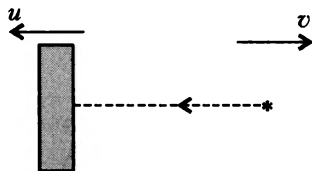


Рис. 29

A19. В схеме, изображенной на рисунке 30, ЭДС источника тока равна 6 В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало, а сопротивления резисторов

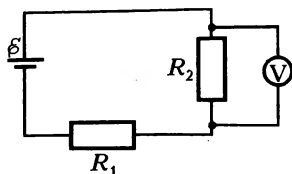


Рис. 30

$R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$. Какое напряжение показывает идеальный вольтметр?
1) 1 В; 2) 2 В; 3) 3 В; 4) 4 В.

A20. На рисунке 31 изображена схема возможных значений энергии атомов разреженного газа. В начальный момент времени атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(3)}$. Возможно испускание газом фотонов с энергией:

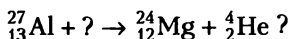
- 1) только $2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$;
- 2) только $3 \cdot 10^{-18}$ и $6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$;
- 3) только $2 \cdot 10^{-18}$, $5 \cdot 10^{-18}$ и $8 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$;
- 4) любой от $2 \cdot 10^{-18}$ до $8 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.

A21. Ядро аргона $^{40}_{18}\text{Ar}$ содержит:

- 1) 18 протонов и 40 нейтронов;
- 2) 18 протонов и 22 нейтрона;
- 3) 40 протонов и 22 нейтрона;
- 4) 40 протонов и 18 нейтронов.

A22. Какая частица вызывает следующую

ядерную реакцию:



- 1) ^4_2He ; 2) 1_0n ; 3) ^1_1H ; 4) γ .

A23. Поток фотонов с энергией 15 эВ выбивает из металла фотоэлектроны, максимальная кинетическая энергия которых в 2 раза меньше работы выхода. Какова максимальная кинетическая энергия образовавшихся фотоэлектронов?

- 1) 30 эВ; 2) 15 эВ; 3) 10 эВ; 4) 5 эВ.

A24. Пучок белого света, пройдя через призму, разлагается в спектр. Была выдвинута гипотеза, что ширина спектра, получаемого на стоящем за призмой экране, зависит от угла падения пучка на грань призмы. Необходимо экспериментально проверить эту гипотезу. Какие два опыта (рис.32) нужно провести для такого исследования?

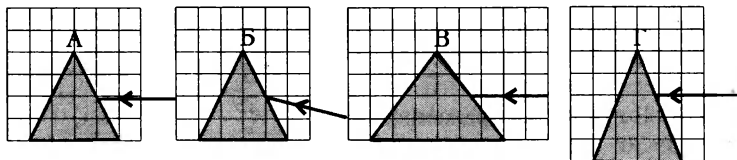


Рис. 32

- 1) А и Б; 2) Б и В; 3) Б и Г; 4) В и Г.

A25. Период малых вертикальных колебаний груза массой m , подвешенного на резиновом жгуте, равен T_0 . Зависимость силы упругости резинового жгута F от удлинения x изображена на графике (рис.33). Период T малых вертикальных колебаний груза массой $4m$ на этом жгуте удовлетворяет соотношению:

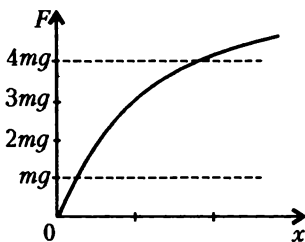


Рис. 33

- 1) $T > 2T_0$; 2) $T = 2T_0$; 3) $T = T_0$; 4) $T < 0,5T_0$.

Часть 2

B1. Частица массой m , несущая заряд q , движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиусом R со скоростью v . Что произойдет с радиусом орбиты, периодом обращения и кинетической энергией частицы при увеличении скорости движения?

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЯ
А) радиус орбиты	1) увеличится
Б) период обращения	2) уменьшится
В) кинетическая энергия	3) не изменится

А	Б	В

B2. Установите соответствие между физическими явлениями и приборами, в которых используются или наблюдаются эти явления.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ	ПРИБОР
А) ионизация газа	1) вакуумный фотоэлемент
Б) фотоэффект	2) дифракционная решетка
	3) счетчик Гейгера
	4) лупа

А	Б

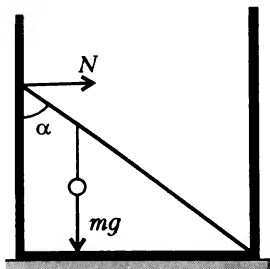


Рис. 34

В3. Невесомый стержень длиной 1 м, находящийся в ящике с гладкими дном и стенками, составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью (рис.34). К стержню на расстоянии 25 см от его левого конца подвешен на нити шар массой 2 кг. Каков модуль N силы, действующей на стержень со стороны левой стенки ящика?

В4. Идеальный газ изохорно нагревают так, что его температура изменяется на $\Delta T = 240$ К, а давление изменяется в 1,8 раза. Масса газа постоянна. Найдите начальную температуру газа по шкале Кельвина.

В5. В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся заряд конденсатора в колебательном контуре с течением времени.

$t, 10^{-6}$ с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q, 10^{-9}$ Кл	2	1,42	0	-1,42	-2	-1,42	0	1,42	2	1,42

Вычислите по этим данным максимальное значение силы тока в катушке. Ответ выразите в мА, округлив его до десятых.

Часть 3

С1. На фотографии (рис.35) изображена электрическая цепь, состоящая из резистора, реостата, ключа, цифровых вольтметра, подключенного к батарее, и амперметра. Составьте

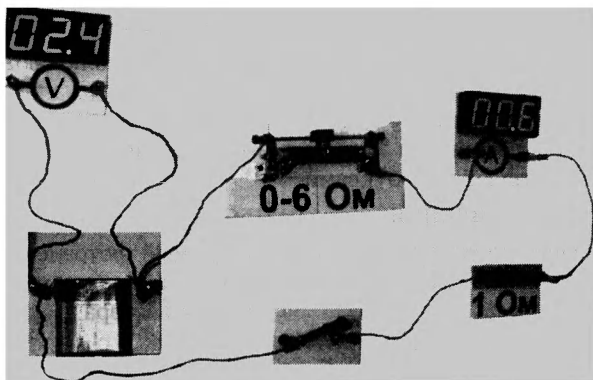


Рис. 35

принципиальную электрическую схему этой цепи и, используя законы постоянного тока, объясните, как изменятся (увеличится или уменьшится) сила тока в цепи и напряжение на батарее при перемещении движка реостата в крайнее правое положение.

С2. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 500 м/с . В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда, а второй упал в этом же месте через 100 с после разрыва. Чему равно отношение массы первого осколка к массе второго осколка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

С3. Один моль идеального одноатомного газа сначала нагрели, а затем охладил до первоначальной температуры 300 К , уменьшив давление в 3 раза (рис. 36). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 1–2?

С4. Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. ЭДС источника $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 2 \text{ Ом}$. Сопротивление реостата можно изменять в пределах от 1 Ом до 5 Ом . Чему равна максимальная мощность тока, выделяемая на реостате?

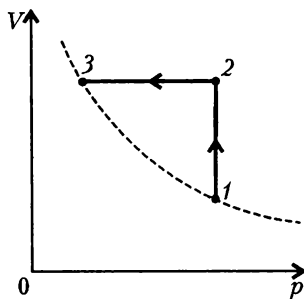


Рис. 36

С5. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение стержня с пятикратным увеличением. Стержень расположен перпендикулярно главной оптической оси, и плоскость экрана также перпендикулярна этой оси. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем, при неизменном положении линзы, передвинули стержень так, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. Определите фокусное расстояние линзы.

С6. Препарат активностью $1,7 \cdot 10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой $0,5 \text{ кг}$. На сколько повысилась температура контейнера за 1 ч , если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α -частицы с энергией $5,3 \text{ МэВ}$? Считать, что энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию контейнера. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Публикацию подготовили М. Демидова, А. Черноуцан

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(заочный тур)

1. В шахматном турнире участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл в шахматы ровно с 5 немцами и 2 французами, каждый немец – с 6 англичанами и 2 французами, а каждый француз – с 3 англичанами и с одинаковым (для всех французам) числом немцев. Найдите это число.

2. Решите неравенство

$$\left| 2 \sin x + 2 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| \leq 2.$$

3. Для 50 детей детского сада закуплены 50 одинаковых тарелок. По краю каждой тарелки равномерно расположены 5 белых кружочков. Воспитатели хотят перекрасить какие-либо из этих кружочков в другой цвет так, чтобы все тарелки стали различными. Какое наименьшее число дополнительных цветов понадобится им для этого?

4. Две параболы $y = x^2$ и $y = 2009 - x^2$, пересекаясь, ограничивают некоторую фигуру. Найдите уравнения всех прямых, делящих площадь этой фигуры пополам.

5. На прямой последовательно расположены точки A, B, C, D , а вне прямой – точка M так, что $AB : BC : CD = a : b : c$ и $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMD$. Найдите отношение $AM : DM$.

6. Решите уравнение

$$2^1 \sin \left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + 2^2 \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + \dots + 2^{99} \sin \left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

7. Могут ли две разные плоскости отсекают от одного трехгранного угла такие пирамиды, что любые две грани, лежащие в одной грани трехгранного угла, имеют равные площади? Могут ли они отсекают такие пирамиды от четырехгранного угла (не обязательно выпуклого)?

8. Найдите первую и две последние цифры десятичной записи числа x_{1001} , если

$$x_1 = 2 \text{ и } x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} x_n + \frac{\sqrt[10]{2} - 1}{\sqrt[10]{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9. Какое наибольшее значение может принимать квадратичная функция в точке 2009, если ее значения в точках -1 , 0 и 1 принадлежат отрезку $[0; 1]$?

10. Для каких натуральных $n \geq 3$ существует выпуклый n -угольник, у которого площадь, а также длины всех сторон и всех диагоналей – натуральные числа?

Вариант 2

(очный тур: Москва)

1 (2 балла). Дети в садике за один день съедают столько же яблок, сколько и груш. Найдите отношение количества мальчиков к количеству девочек в этом садике, если известно, что каждый мальчик съедает за день 3 яблока и 2 груши, а каждая девочка – 1 яблоко и 3 груши.

2 (3 балла). Сколько решений имеет уравнение

$$\arccos(\cos 2x) = \frac{2x}{2009}?$$

3 (4 балла). Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2 - 14x + 5} - \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 + x - 1}.$$

4 (5 баллов). Две окружности, касающиеся прямой BC в точках B и C соответственно, пересекаются в точках A и O . Прямые AO и BC пересекаются в точке D . Найдите отношение AO к OD , если $AB = 6$ см, $AC = 5$ см, $BC = 4$ см.

5 (8 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых все решения уравнения

$$3^{1-x^2-2ax-2a} = \log_3 \left(\frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|} \right)$$

принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

6 (8 баллов). Все члены геометрической прогрессии b_1, b_2, \dots, b_n являются целыми числами. Определите, при каких из указанных ниже значений k число $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2$ делится на $b_1 + b_2 + \dots + b_k$ независимо от выбора прогрессии, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 5$.

Вариант 3

(очный тур: Нижний Новгород, Курск)

1 (3 балла). Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(x + 2009).$$

2 (4 балла). В метро города N можно провозить предметы, длина и ширина которых не превосходят 1 м, а высота не превосходит 150 см. Можно ли, согласно этим правилам, провезти неразборную удочку длины 206 см в коробке, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда? Толщиной удочки можно пренебречь, сгибать удочку не разрешается.

3 (4 балла). Решите неравенство

$$\frac{6^{x+1}}{9^x + 4^x} \geq x^2 + 3.$$

4 (5 баллов). При каких значениях параметра a строго между двумя корнями уравнения $ax^2 + x + 2a^2 = 0$ находится ровно один корень уравнения $ax^2 + 2x - 2a^2 = 0$ и строго между двумя корнями второго уравнения находится ровно один корень первого уравнения?

5 (8 баллов). Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите длины сторон этого треугольника, если известно, что $AH = BH = 3$ см, а $CH = 17$ см.

6 (6 баллов). Укажите, какие из следующих функций:

а) $y = \sin|x|$, б) $y = \cos|x|$, в) $y = |\sin x| + |\cos x|$, заданных при $x \in (-\infty; +\infty)$, являются периодическими и найдите все периоды таких функций.

Вариант 4

(очный тур: Томск, Улан-Удэ)

1 (2 балла). Решите неравенство

$$2^{2x} + 502 \cdot 2^{x+2} - 2009 \leq 0.$$

2 (3 балла). Сколько членов арифметической прогрессии с первым членом 12 и разностью 3, состоящей из 2009 чисел являются также членами бесконечной геометрической прогрессии, первый член и знаменатель которой равны 3?

3 (4 балла). Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) \log_2\left(\sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 0.$$

4 (5 баллов). При каких значениях параметра a все решения неравенства $|x - a| \leq 3 - x^2$ образуют отрезок длины 1?

5 (8 баллов). В треугольнике ABC косинус угла A равен $\frac{1}{8}$, длина биссектрисы AL этого треугольника равна $\frac{10}{3}$ см, длина стороны $BC = 6$ см. Найдите длины сторон AB и AC этого треугольника.

6 (8 баллов). Какие из значений 4 ; $4\frac{4}{5}$; 5 может принимать отношение периметра прямоугольного треугольника к квадратному корню из его площади? Ответ обоснуйте.

Вариант 5

(очный тур: Челябинск)

1 (2 балла). Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 + 12x + 12} = 2x + 3.$$

2 (3 балла). Решите неравенство

$$\left| \left| 36^{x^2} - 1 \right| - 2 \right| \geq 3.$$

3 (4 балла). По пути из дома на рынок Валера купил в ларьке газету «Московский комсомолец» и стал ее читать. На рынке он прервал чтение, купил картошку и пошел обратно. Пройдя мимо ларька, Валера вновь продолжил чтение газеты. Каково расстояние от дома до ларька, если путь занял 1 ч, скорость Валеры налегке составила 6 км/ч, с картошкой – 3 км/ч, а чтение газеты снизило скорость до 3 км/ч и 2 км/ч соответственно?

4 (5 баллов). Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2 \sin \left(3x + \frac{3\pi}{8} \right).$$

5 (8 баллов). Медиана BM треугольника ABC делится вписанной в него окружностью на три отрезка в отношении $1 : 2 : 1$, считая от вершины. Найдите длины сторон AB и BC , если $AC = 3$ см.

6 (8 баллов). Какие из значений 2 ; $2\frac{2}{5}$; $2\frac{1}{2}$ может принимать в прямоугольном треугольнике отношение радиуса его описанной окружности к радиусу его вписанной окружности? Ответ обоснуйте.

1. Желоб с гладкими твердыми стенками имеет прямоугольное сечение, размеры которого указаны на рисунке 1, причем правая стенка желоба существенно выше левой. С края левого бортика в направлении правой стенки желоба бросают мячик, который после упругих ударов о дно и стенки желоба выпрыгивает обратно. Начальная скорость мячика $v_0 = 1,4$ м/с. Под какими углами к горизонтали нужно бросить мячик, чтобы он, покинув желоб, попал в исходную точку и испытал при этом не более двух соударений? При расчетах положите $H = 0,4$ м, $L = 0,3$ м. Ускорение свободного падения примите равным $g = 9,8$ м/с². Размером мячика можно пренебречь.

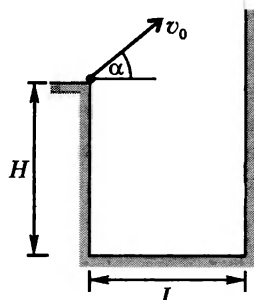


Рис. 1

2. Изучив законы идеального газа, ученик решил разработать газовый термометр собственной конструкции, предназначенный

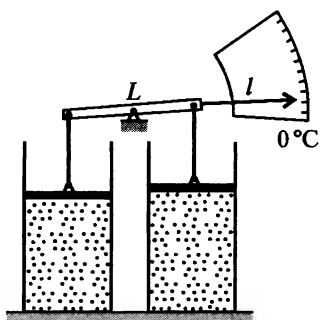


Рис. 2

для измерения комнатной температуры. По его проекту нужно расположить рядом два одинаковых цилиндрических сосуда, содержащих под поршнями гелий (рис.2). При этом количество гелия в левом сосуде должно составлять $\nu_1 = 1$ моль, а в правом — $\nu_2 = 3$ моля. Массы поршней следует подобрать таким образом, чтобы при температуре $t_0 = 0$ °С оба поршня находились в равновесии на одной и той же высоте $H = 27,3$ см над дном сосудов. С

помощью шарниров и стержней нужно соединить поршни с коромыслом длиной $L = 5$ см, способным свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его середину. Продолжением коромысла должна являться легкая стрелка длиной $l = 2,5$ см, позволяющая отсчитывать угол его поворота на специальной шкале. Объясните принцип действия разработанного учеником термометра. Почему ученик предложил использовать в качестве рабочего тела гелий? Считая угол поворота стрелки малым, а измеряемую температуру — не

превышающей комнатную, найдите, на каком расстоянии Δx друг от друга нужно нанести деления на шкале, чтобы цена деления составляла один градус Цельсия.

3. Тонкое диэлектрическое кольцо радиусом R равномерно зарядили зарядом $+Q$ (рис.3). Затем из кольца вырезали и удалили маленький кусочек, размер которого определяется углом $\Delta\phi \ll 1$.

На расстоянии $h = R$ от плоскости кольца на его оси поместили точечный заряд $+q$. Какая сила F действует на заряд? Электрическая постоянная ϵ_0 .

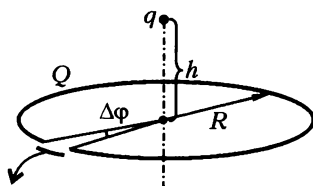


Рис. 3

4. Желая разрядить заряженный конденсатор, его обкладки начали поочередно заземлять: сначала соединили с Землей одну обкладку и через короткое время отсоединили ее – первый шаг процесса разрядки, затем соединили с Землей другую обкладку и отсоединили ее – второй шаг и так далее. Оказалось, что после третьего шага процесса напряжение на конденсаторе уменьшилось по отношению к первоначальному в k_3 раз, а после седьмого – в k_7 раз. Опишите процессы, происходящие при разрядке конденсатора. Определите, во сколько раз k_1 уменьшилось по отношению к первоначальному напряжению на конденсаторе после первого шага?

5. На рисунке 4 изображена схема станции метрополитена с примыкающим к ней криволинейным участком пути, расположенным в тоннеле. Пассажир стоит на краю платформы в самом ее начале лицом навстречу движению поездов. В некоторый момент времени он замечает на кафельной облицовке стены станции отблески света фар приближающегося поезда. Через какое время после этого головной вагон поезда остановится около пассажира? В тоннеле поезд движется равномерно со скоростью

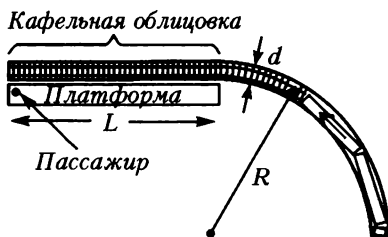


Рис. 4

$v_0 = 72$ км/ч, а при въезде на станцию тормозит с постоянным ускорением. Радиус закругления пути, измеренный по внешней стене тоннеля, $R = 50$ м, ширина тоннеля $d = 5$ м, длина платформы $L = 160$ м. Для упрощения расчетов можно считать, что фары поезда расположены на одном уровне с глазами наблюдателя, а расстояние от правой фары до стенки тоннеля

мало. Отражением света от стен тоннеля и боковых поверхностей рельсов можно пренебречь.

Очный тур

1. Дождевая капля, покинув облако на большой высоте, падает вертикально. Через некоторое время ее скорость становится равной по модулю $v = 2 \text{ м/с}$. В этот момент модуль ускорения капли равен $a = 8,4 \text{ м/с}^2$. Под каким углом к вертикали будет наклонен след, который эта капля оставит на боковом стекле автомобиля, движущегося прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью, модуль которой равен $u = 72 \text{ км/ч}$? Считайте, что действующая на каплю сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна ее скорости.

2. Два груза с массами m_1 и m_2 , соединенные легкой пружиной жесткостью k , соскальзывают с плоскости, образующей угол α с горизонтом. При этом длина пружины остается неизменной и равной l . Масса нижнего груза m_1 , а коэффициент его трения о плоскость μ_1 . Коэффициент трения второго груза о плоскость μ_2 . Определите модули ускорений грузов и длину пружины в недеформированном состоянии.

3. Маленький шарик массой m , подвешенный к потолку комнаты на невесомой и нерастяжимой нити, смещают так, чтобы нить была слегка натянута и образовывала с вертикалью угол $\alpha < 90^\circ$. Затем шарик отпускают без начальной скорости. Пренебрегая влиянием воздуха, определите модуль силы натяжения нити в тот момент, когда направление ускорения шарика и ось нити совпадают.

4. На горизонтальной крышке стола лежит кубик. Коэффициент трения кубика о крышку μ . Средине боковой грани кубика касается небольшой упругий шарик, подвешенный к потолку на легкой нерастяжимой нити длиной L . Массы кубика и шарика одинаковы. Шарик отклонили от исходного положения так, чтобы нить была слегка натянута, образовывала с вертикалью угол α и располагалась в вертикальной плоскости, проходящей через центр кубика перпендикулярно его грани. Затем шарик отпустили без начальной скорости. Определите расстояние, на которое переместится кубик по крышке стола после удара, если он не слетает с нее.

5. В горизонтальной достаточно длинной гладкой трубе между двумя поршнями находится один моль идеального одноатомного газа. В остальных частях трубы создан вакуум. В некоторый момент времени абсолютная температура газа равна T_0 , а поршни движутся навстречу друг другу со скоростями,

модули которых равны v_1 и v_2 . Пренебрегая теплообменом газа с окружающими телами, найдите температуру T газа в тот момент, когда его давление станет максимальным. Процесс сжатия газа считайте равновесным. Масса каждого поршня равна M и значительно больше массы газа.

6. В цилиндре под поршнем содержится воздух с парами воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении. Относительная влажность воздуха $\phi = 80\%$. Определите установившееся в цилиндре давление после изотермического уменьшения объема влажного воздуха в $n = 2$ раза.

7. Цикл теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется некоторое количество одноатомного идеального газа, в координатах давление – температура (в относительных единицах) имеет вид прямоугольного треугольника, показанного на рисунке 5. Определите КПД этого теплового двигателя.

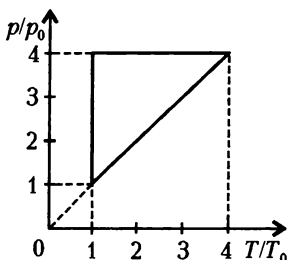


Рис. 5

8. В схеме, представленной на рисунке 6, лампы L_1 и L_2 рассчитаны на напряжения $U_1 = 2,5$ В и $U_2 = 6,3$ В и мощности $P_1 = 0,5$ Вт и $P_2 = 1,4$ Вт соответственно. ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока равны $\mathcal{E} = 9$ В и $r = 0,8$ Ом. Чему равны сопротивления R_1 и R_2 резисторов, если обе лампы горят нормальным накалом?

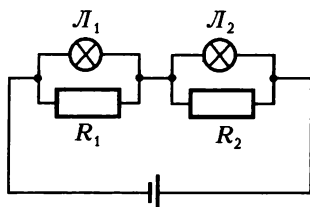


Рис. 6

9. В схеме, изображенной на рисунке 7, ключ K достаточно долгое время был замкнут. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R после размыкания ключа? Излучением пренебречь. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

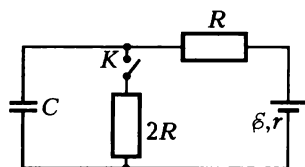


Рис. 7

10. В показанной на рисунке 8 схеме оба конденсатора предварительно были разряжены, а ключи разомкнуты. После замыкания ключа K_1 через достаточно большой

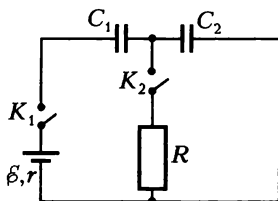


Рис. 8

промежуток времени замыкают ключ K_2 . Найдите количество теплоты, которое может дополнительно выделяться в схеме после замыкания ключа K_2 . Параметры элементов указаны на схеме.

11. Квадратную рамку, изготовленную из тонкой жесткой проволоки, поместили в однородное магнитное поле так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна вектору индукции \vec{B} магнитного поля. Длина стороны рамки равна a . С какой угловой скоростью нужно вращать рамку вокруг одной из ее сторон, чтобы амплитуда ЭДС в рамке была равна ε ? Считайте, что сопротивление рамки достаточно велико.

12. Тонкая прямая палочка размещена перпендикулярно главной оптической оси тонкой линзы так, что один из ее концов находится на этой оси. Линза дает действительное изображение палочки с увеличением k . Расстояние между палочкой и изображением, отсчитываемое вдоль оси линзы, равно l . Найдите фокусное расстояние линзы.

*Публикацию подготовили В.Алексеев,
Е.Григорьев, В.Макаров, В.Панферов,
К.Парфенов, В.Погожев, С.Чесноков, В.Ушаков*

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2009»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. На сколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{3}$?

2. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных – от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

3. При каждом значении a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$$

4. Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110° ?

5. Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

6. Сколько решений на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

7. Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A , а третьей окружности – в точках B и C . Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D , продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E , а продолжения хорд BE и CD пересекают третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG , если $BC = 5$ и $BF = 12$.

8. Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей

прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 15 и 45?

б) Какое наибольшее количество раз в течение трех суток может встретиться самое редкое показание такой стрелки (из всех потенциальных показаний)?

9. Найдите все пары (x, y) , при каждой из которых для чисел

$$u = \sqrt{4 + x^3 - 9x} - x - 3^y \text{ и } v = 2 - x - 3^y$$

справедливы все три следующих высказывания сразу: если $|u| > |v|$, то $u > 0$, если $|u| < |v|$, то $0 > v$, а если $|u| = |v|$, то $u > 0 > v$.

ФИЗИКА

Олимпиада по физике традиционно проводится в форме устного испытания. В 2009 году участникам олимпиады предлагались задания, включающие два теоретических вопроса и две задачи различного уровня сложности.

Ниже приведены задачи олимпиады «Ломоносов-2009».

Задачи

1. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. При этом центр колеса движется прямолинейно с постоянным ускорением $a_{\text{ц}}$. Найдите модуль ускорения a верхней точки колеса в момент времени, когда скорость центра колеса равна $v_{\text{ц}}$.

2. На гладкой невесомой нерастяжимой нити, один конец которой прикреплен к потолку, подвешен блок (рис.1). Другой конец этой нити прикреплен к грузу массой m . К этому грузу прикреплена вторая такая же нить, переброшенная через закрепленный блок. К свободному концу второй нити прикреплен груз массой M . Масса подвижного блока с подвешенным к его оси грузом равна M . Отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Первоначально груз массой M , прикрепленный ко второй нити, удерживали неподвижным, а затем его отпустили. Найдите ускорение a подвижного блока для моментов времени, когда грузы еще не касаются блоков.

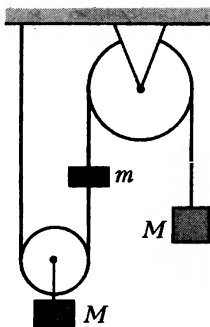


Рис. 1

3. Профиль снежной горки представляет собой дугу окружности радиусом $R = 10$ м с плавным выходом на горизонтальную плоскость BC (рис.2). Поверхность горки гладкая, а горизонтальная плоскость шероховатая. На каком расстоянии l (в точке C) от конца горки (точки B)

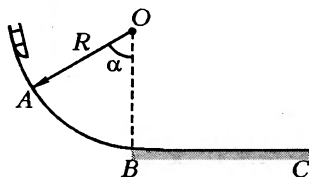


Рис. 2

остановятся съехавшие с горки санки, если в точке A их полное ускорение было равно по модулю ускорению свободного падения g , а коэффициент трения санок о плоскость $\mu = 0,15$? Радиус дуги окружности, проведенный в точку A , образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$.

4. В кабине лифта, движущейся вертикально вниз с постоянной скоростью u , роняют шарик. В момент подлета шарика к полу его скорость относительно земли вертикальна и равна v . Соотношение скоростей u и v таково, что после абсолютно упругого удара о пол шарик относительно земли продолжает двигаться вниз. Определите максимальное расстояние h между шариком и полом кабины лифта после удара.

5. Тонкая неоднородная палочка постоянного сечения S и длиной L , центр тяжести которой находится на расстоянии $0,25L$ от одного из ее концов, лежит на горизонтальном дне сосуда. Масса палочки m . Сосуд заполняют жидкостью. При какой плотности ρ жидкости палочка в сосуде сможет принять вертикальное положение при достаточно высоком уровне жидкости?

6. В системе, изображенной на рисунке 3, брусок массой m лежит на гладкой горизонтальной плоскости, а пружины 1 и 2 сильно растянуты. Оси пружин и нерастяжимые нити горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости с центром масс бруска. Жесткости пружин одинаковы и равны k . Брусок смещают на малое расстояние вдоль оси OX . Определите период колебаний бруска после его отпускания. Массой блока, пружин и нитей, а также трением пренебречь.

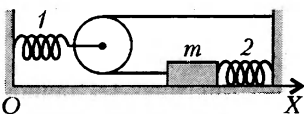


Рис. 3

7. Моль гелия при нагревании получил количество теплоты Q . При этом давление газа увеличивалось пропорционально его объему, а среднеквадратичная скорость теплового движения его атомов возросла в n раз. Найдите абсолютную температуру T_0 газа перед началом нагревания.

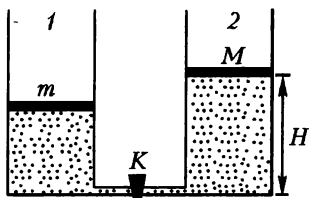


Рис. 4

8. В гладком цилиндре 1 под поршнем массой $m = 5$ кг находится идеальный газ. Цилиндр 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же цилиндром 2, как показано на рисунке 4. Во втором цилиндре под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ, как и в цилиндре 1. В начальном состоянии

кран K закрыт, а поршень в цилиндре 2 находится на высоте $H = 35$ см от дна. На какое расстояние Δh переместится поршень в цилиндре 1 после открывания крана? Температура газа в первом цилиндре в течение всего процесса поддерживается постоянной и равной $T_1 = 300$ К, а во втором цилиндре – постоянной и равной $T_2 = 350$ К. Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать. Толщина поршней больше диаметра соединительной трубки.

9. Определенное количество аргона изохорически нагрели до некоторой температуры. Затем абсолютную температуру газа увеличивали пропорционально объему по закону $T = \alpha V$ до такой величины, что при последующем охлаждении по закону $T = \beta V^2$ газ перешел в начальное состояние. Найдите КПД η указанного цикла, зная начальный объем газа V_1 и постоянные коэффициенты α и β .

10. Масса влажного воздуха, занимающего объем $V = 1$ л при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, давлении $p = 86,5$ кПа и относительной влажности $\phi = 0,4$, равна, $m = 1$ г. Определите давление насыщенных паров при заданной температуре. Считать молярную массу сухого воздуха равной $M_{\text{в}} = 29$ г/моль, а молярную массу водяных паров – равной $M_{\text{п}} = 18$ г/моль.

11. Маленькая муфта массой m , имеющая заряд q , может скользить без трения по гладкому горизонтальному непроводящему стержню AB длиной l (рис.5). В точке C , расположенной на расстоянии l от точек A и B , закреплен маленький шарик, на котором помещен такой же заряд q . Первоначально муфту удерживают в точке A . Какую минимальную по модулю скорость v_{min} нужно сообщить муфте, чтобы она могла достичь точки B ?

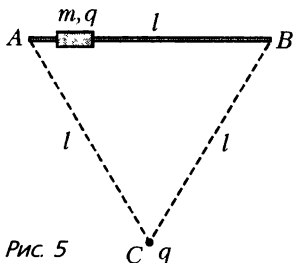


Рис. 5

12. На гладкой горизонтальной непроводящей плоскости с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$, рас-

положенной в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B , удерживают на расстоянии L друг от друга две маленькие одинаковые шайбы. Масса каждой шайбы m . Шайбы имеют равные по модулю, но противоположные по знаку заряды. В момент времени $t = 0$ шайбы одновременно отпускают без начальной скорости. Найдите минимальное расстояние L_{\min} между шайбами, зная, что в процессе движения они не сталкиваются.

13. На цилиндрическую проволочную катушку надето проводящее кольцо с малой индуктивностью, покрытое изоляцией. Плоскость кольца перпендикулярна оси катушки. При равномерном нарастании тока в катушке от нуля до $I_1 = 5$ А за время $t_1 = 9$ с в кольце выделяется количество теплоты $Q_1 = 0,5$ Дж. Какое количество теплоты Q_2 выделится в кольце, если ток в катушке будет равномерно возрастать от нуля до $I_2 = 10$ А за время $t_2 = 3$ с? В обоих случаях кольцо удерживают неподвижным относительно катушки.

14. Контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0,1$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 10$ мкГн. Сопротивление катушки $R = 0,05$ Ом. Катушка и конденсатор последовательно подключены к источнику гармонического напряжения, частота которого равна собственной частоте контура. Определите среднюю мощность, потребляемую контуром от источника, если амплитуда напряжения на конденсаторе остается практически неизменной и равной $U_0 = 20$ В.

15. На закрепленный зеркальный шар радиусом R падает узкий параллельный пучок света мощностью P . Ось падающего пучка света проходит на расстоянии a от центра шара. Найдите силу F , с которой свет действует на шар.

16. К тонкой собирающей линзе со скоростью v , образующей малый угол α с ее главной оптической осью, приближается точечный источник света S . Траектория движения источника пересекает главную оптическую ось в точке, находящейся на расстоянии s от линзы, превышающем ее фокусное расстояние F . Найдите модуль и направление скорости u движения изображения S' этого источника в тот момент, когда он находился на расстоянии $a > F$ от линзы.

*Публикацию подготовили А.Бегуниц, А.Грачев,
В.Макаров, С.Никитин, В.Погожев, Н.Подымова,
М.Полякова, И.Сергеев, С.Чесноков*

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

МАТЕМАТИКА

Математический факультет

Олимпиада

1 тур

1. Бригада из 6 землекопов в течение 8 часов копала канаву. При этом в каждый момент времени работало ровно двое, а остальные играли в карты. В конце рабочего дня оказалось, что первый землекоп играл в карты 3 часа, второй – 4 часа, третий – 5 часов, четвертый – 6 часов и пятый – 7 часов. Сколько часов играл в карты шестой землекоп?

2. Пусть x, y, z – решение в натуральных числах уравнения $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 5/3$. Вычислите произведение $x y z$.

3. Найдите абсциссу точки пересечения прямой $y = 2x + 1$ с прямой, касательной к каждой из двух парабол $y = x^2 - 6$ и $y = -x^2 + 12x - 32$.

4. На реке с равномерным течением последовательно расположены три пункта A, B и C . Моторка идет от A до C столько же времени, сколько шляпа плывет от B до C , а расстояние от B до C моторка проходит в 12 раз быстрее, чем шляпа плывет от A до B . Найдите отношение расстояний AC/BC .

5. Все страницы книги с первой по последнюю занумерованы без пропусков идущими подряд десятичными числами, начиная с 1. Для этого в общей сложности на них было напечатано 1518 цифр. Сколько страниц в книге?

6. Сумма первых 73 членов геометрической прогрессии с целым начальным членом и целым знаменателем дает при делении на 13 остаток 6, а сумма первых 91 членов – остаток 4. Какой остаток дает знаменатель прогрессии при делении на 13?

7. Найдите двузначное число a , если известно, что из следующих четырех утверждений верны ровно два:

- 81 делится на a ;
- 27 делится на a ;
- 54 делится на a ;
- $a < 50$.

8. Робинзон Крузо гуляет по необитаемому острову, имеющему форму треугольника ABC со сторонами $AB = 9$, $BC = 11$ и $AC = 13$. В каждый момент прогулки он идет параллельно какой-нибудь стороне треугольника; дойдя до берега, Робинзон поворачивает и продолжает идти прямо вглубь острова параллельно другой стороне; дойдя еще раз до берега – опять поворачивает, и т.д. Прогулка начинается на стороне AC из точки M , для которой $AM = 5$. Первоначально Робинзон движется параллельно стороне BC ; прогулка заканчивается, когда он вернется в точку M . Найдите разность между длиной пути, пройденного Робинзоном Крузо параллельно стороне AC и длиной пути, пройденного им параллельно стороне AB .

9. Четыре города расположены в вершинах прямоугольника со сторонами $5 - \sqrt{3}$ км и 1 км. Нужно проложить дороги так, чтобы из каждого города можно было добраться в каждый. Какова наименьшая возможная длина (в км) всех проложенных дорог?

10. Прямая $y = a$ пересекает график многочлена $y = 8x^3 - 12x^2 + 2x + 6$ в трех точках P , Q , R , считая слева направо. Площадь куска плоскости, ограниченного отрезком PQ снизу и графиком сверху, равна площади куска плоскости, ограниченного отрезком QR сверху и графиком снизу. Чему равно a ?

11. Блоха прыгает по окружности одинаковыми прыжками в одном направлении, начиная свой путь из точки A . Когда блоха снова вернулась в точку A , оказалось, что она перепрыгнула через точку A ровно 6 раз. Какое наибольшее значение может принимать градусная мера дуги, на которую прыгает блоха, если известно, что эта градусная мера – целое число, не превосходящее 85?

12. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами $4 - \sqrt{2}$, $4 + \sqrt{2}$ и 6.

13. Основанием пирамиды $SABCDEF$ является правильный шестиугольник $ABCDEF$. Через точку X , лежащую на продолжении ребра SC за точку C , так что в $|SC| : |CX| = 1 : 3$, провели прямую, пересекающую прямые SE и FD в точках Y

и Z соответственно. Найдите отношение длин отрезков $|XZ| : |ZY|$.

14. Окружность, построенная на диагонали AC трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и касается боковой стороны CD . Основания трапеции $AD = 25$ и $BC = 9$. Найдите диагональ AC .

15. Рассмотрим правильный 18-угольник. Сколько в нем можно провести диагоналей, не параллельных ни одной из его сторон?

16. На прямой выбрана 101 точка. Любые две из выбранных точек соединим отрезком и отметим на нем точку, делящую этот отрезок пополам. Какое минимальное число новых точек может при этом получиться?

17. Найдите наименьшее натуральное k для которого $21029 \cdot k$ делится на 23503.

18. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 50 и имеющее ровно 30 натуральных делителей (включая единицу и само себя).

19. На какую наибольшую степень двойки делится число $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \dots \cdot 199 \cdot 200$?

20. Плоскость замостили одинаковыми правильными шестиугольниками без пропусков и наложений (рис.1). В одном

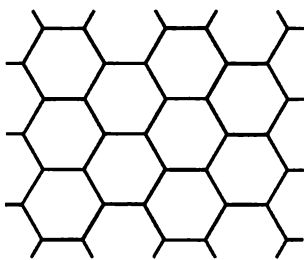


Рис. 1

шестиугольнике написали число 0. Затем во всех шестиугольниках, имеющих с ним хотя бы одну общую сторону, написали число 1. Далее во всех пустых шестиугольниках, имеющих хотя бы одну общую сторону с теми шестиугольниками, в которых написано число 1, написали число 2. Эту операцию повторили 200 раз: на $(N + 1)$ -м шаге во всех пустых шестиугольниках, имеющих

хотя бы одну общую сторону с теми шестиугольниками, в которых написано число N , написали число $N + 1$. В скольких шестиугольниках написано число 100?

// тур

1. Трехзначное число разложили на целые множители. После этого каждый множитель увеличили не более чем на 10% так, чтобы снова получилось целое число (некоторые множители, возможно, остались без изменения). На какое наибольшее число процентов могло увеличиться произведение?

2. Вася составил семизначное число, используя каждую цифру от 1 до 7 ровно по одному разу. Коля сделал то же самое. Оказалось, что Васино число больше, чем Колино. Докажите, что Васино число не делится на Колино.

3. На рисунке 2 изображен план города. Точками обозначены площади, а отрезками – улицы. Экскурсионный маршрут должен начинаться с одной из площадей, проходить по каждой улице ровно один раз и возвращаться на ту площадь, с которой он начался. Сколько существует различных экскурсионных маршрутов?

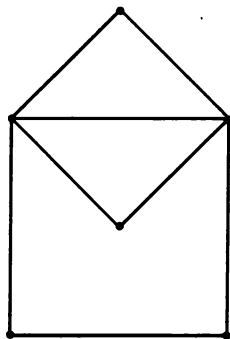


Рис. 2

4. Многочлен $R(x) = x^2 + px + q$ называется *странным*, если существуют числа a, b, c , такие что $a < R(a) < b < R(b) < c = R(c)$. а) Приведите пример странного многочлена. б) Пусть коэффициенты p и q странного многочлена – целые числа. Докажите, что p нечетно.

5. Может ли в треугольнике с углом 30° центр описанной окружности лежать на вписанной?

6. Планета Марс имеет форму шара радиуса R . Марсоход запрограммирован так, что он проезжает по дуге большого круга расстояние a , меньшее половины длины экватора, затем поворачивает направо на угол $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, снова проезжает расстояние a по дуге большого круга, поворачивает на тот же угол α налево и т.д. (чередую повороты направо и налево). а) Марсоход вернулся в исходную точку. Докажите, что в этот момент по программе ему положено делать левый поворот. б) До возвращения в исходную точку марсоход несколько раз пересек свой след. Какое наименьшее число раз он мог это сделать? в) Пусть путь марсохода замкнут и имеет наименьшее положительное число самопересечений. При каких значениях a и α длина этого пути будет наименьшей?

Устный экзамен

1. Сколькими способами можно в клетках квадрата 3×3 расставить числа от 1 до 9 (каждое занимает одну клетку и встречается один раз) так, чтобы сумма чисел на каждой из двух диагоналей равнялась 8?

2. Для каждой точки с координатами (p, q) рассмотрим квадратный трехчлен $x^2 + px + q$. Покрасим точку зеленым

цветом, если соответствующий квадратный трехчлен имеет два корня, один из которых принадлежит отрезку $[-2; -1]$, а другой – отрезку $[1; 2]$. Изобразите на плоскости множество зеленых точек и найдите его площадь.

3. В треугольнике ABC расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности. Какой может быть величина угла C ?

4. Пусть S_1 – сфера радиуса 7, а S_2 – сфера радиуса 1, расположенные в пространстве так, что расстояние между их центрами равно 10. Прямая l касается первой сферы в точке K_1 , а второй – в точке K_2 . Какую максимальную и какую минимальную длину может иметь отрезок K_1K_2 ?

5. Найдите все целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} a^4 - b^4 - c^4 = a^2b^2c^2, \\ a^3 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Публикацию подготовили Ю.Бурман, Г.Рыбников

**ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Два экскаватора вместе рыли котлован 3 часа, после чего еще за 1 час завершил всю работу только второй экскаватор. За сколько часов вырыл бы котлован один первый экскаватор, если второй, работая один, выполнил бы всю работу на 3 часа быстрее первого?

2. Решите уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{2x + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}} \geq x.$$

4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен α , а длина биссектрисы равна l .

5. Решите уравнение

$$\log_2 \log_{\frac{x}{9}} \frac{x}{27} = \log_2 \log_3 x + 1.$$

6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{\frac{1}{x}} = \frac{2a-1}{a^2-1}$$

имеет решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Мастер и ученик, выполняя задание, работали вместе 1 час, после чего один ученик за 5 часов закончил выполнение всего задания. За сколько часов выполнил бы все задание ученик, если мастеру на все задание требуется на 4 часа меньше, чем ученику?

2. Решите уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{12x + \frac{169}{4}} + \frac{13}{2}} \geq x$.

4. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r , а угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен α . Найдите длину медианы треугольника.

5. Решите уравнение

$$\log_5 \log_{\frac{x}{9}} \frac{x}{81} = \log_5 \left(\frac{3}{5} \log_3 x \right) + 1.$$

6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$3^{x^2+2x} = \frac{a+2}{a^2-2a}$$

имеет решение.

Вариант 3

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+10}} \geq \frac{1}{2}$.

2. В бассейн по двум трубам поступает вода, которую откачивает один насос. Если открыть первую трубу и включить насос, то пустой бассейн заполнится за 2 часа. Если открыть вторую трубу и включить насос, то пустой бассейн заполнится за 3 часа, а если открыть обе трубы и включить насос, то пустой бассейн заполнится за 1 час. За какое время наполнится пустой бассейн, если выключить насос и открыть обе трубы?

3. Решите уравнение $1 - 5 \sin 2x = 2 \sin x - 5 \cos x$.

4. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит на границе круга, касающегося стороны BC в ее середине. Найдите площадь круга.

5. Решите уравнение

$$\log_9(2x-3) \log_{3x-7} 9 - \log_{2x-3} 81 \log_9(3x-7) = 1.$$

6. Найдите решение уравнения $\sin 2x = 1$, для которого выражение $|2,4 - x|$ принимает наименьшее возможное значение.

Вариант 4

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+9}} \geq \frac{1}{2}$.

2. Два насоса откачивают воду, равномерно поступающую в бак. Если включить первый насос, то бак опустеет за 4 часа. Если включить второй насос, то бак опустеет за 3 часа, а если включить оба насоса, то бак опустеет за 1 час. За какое время наполнится пустой бак, если выключить оба насоса?

3. Решите уравнение $3 \sin 2x + 2 \cos x = 1 + 3 \sin x$.

4. Вершина A ромба $ABCD$ со стороной a лежит на окружности, касающейся сторон BC и CD . Найдите радиус окружности, если угол при вершине A равен α .

5. Решите уравнение

$$\log_6(4x+5) \log_{5x-2} 6 = 3 - \log_{4x+5} 36 \log_6(5x-2).$$

6. Найдите решение уравнения $\sin 2x = 0$, для которого выражение $|x - 4,6|$ принимает наименьшее возможное значение.

Вариант 5

(олимпиада-2009, все факультеты)

1 (2 балла). Функция двух переменных $f(x, y)$ положительна при всех x, y , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 8x + 14, \\ y \geq x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

При всех остальных x, y функция f отрицательна. Верно ли, что при всех x, y , удовлетворяющих неравенству $y \leq x^2 - 4x + 7$, функция $f(x, y)$ отрицательна? Ответ обоснуйте.

2 (3 балла). Сколько различных по величине или по расположению прямоугольников, состоящих из целого числа клеток, можно начертить на шахматной доске 8 на 8?

3 (3 балла). Решите неравенство

$$\log_{\cos x} (x^2 - 6x + 18) > \frac{2}{\log_5 \cos x}.$$

4 (4 балла). Найдите ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

5 (4 балла). Найдите все значения параметра a , при которых отрезок $[4a; 5a^2]$ содержит целое число.

6 (5 баллов). Все ребра тетраэдра равны 12 см. Можно ли его уместить в коробку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 13 см, 15 см, 9 см?

7 (5 баллов). Для каждой точки декартовой плоскости с целочисленными координатами, кроме начала координат $(0; 0)$, построена окружность радиуса 10^{-6} с центром в этой точке. Докажите, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекается хотя бы с одной из этих окружностей.

Вариант 6

(межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии)

1. Делится ли число $2^{2^{2007} + 3^{2008} - 2009} - 1$ на 1155?

2. На кодовом замке имеется круглый диск с риской. Вокруг диска нанесены числа от 0 до 99 по часовой стрелке. Для управления замком служат две кнопки: «вправо» и «влево». При нажатии на кнопку «вправо» диск вращается на 43 деления по часовой стрелке, при нажатии на кнопку «влево» – на 20 делений против часовой стрелки. Каждая из этих операций выполняется за 1 секунду. Изначально замок установлен на число 0. Замок открывается при его установке на число 50 – ключ замка.

А. За какое наименьшее время можно открыть замок при данном ключе 50?

Б. Докажите, что замок можно открыть при любом ключе (ключ – число от 1 до 99).

В. За какое наименьшее время можно гарантированно открыть замок при любом ключе?

3. Осмысленная фраза на русском языке записана два раза подряд без пробелов и знаков препинания и зашифрована шифром Виженера. Зашифрование состоит в следующем. Выбирается ключевое слово, например, **мир**. Для изменения первой

буквы шифруемого сообщения создается таблица следующего вида:

абвгдеёжзийклмнопрстуфхцчщщъьэюя

мнопрстуфхцчщщъьэюяабвгдеёжзийкл

В нижней строке алфавит циклически сдвинут влево так, чтобы первая буква ключевого слова **м** оказалась под буквой **а**. Буква открытого текста (например, **п**) отыскивается в верхней строке и заменяется стоящей под ней буквой (для **п** – это **ь**). Для зашифрования второй буквы аналогичным образом используется буква **и**, третьей – **р**, четвертой – вновь **м** и т.д. Сообщение было зашифровано с использованием ключевого слова из пяти букв. Результат зашифрования выглядит так:

мхлцлцифцбдюдигшсптаивпбъдюдольуэюыйемхл

Восстановите исходное сообщение и ключевое слово.

4. В последовательности 2, 0, 0, 8, ... каждый следующий член равен младшей цифре в числе, равном сумме четырех последних членов последовательности. Докажите, что в этой последовательности вновь встретятся подряд идущие числа 2, 0, 0, 8.

5. Решите при всех допустимых значениях параметра a уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2(a+1)x - (a-3)(a+1) = 0.$$

6. Для зашифрования сообщения на русском языке его записывают в одну строку без пробелов и знаков препинания. Заглавные буквы заменяются на строчные. В получившейся цепочке буквы нумеруются слева направо 1, 2, ..., L . Зашифрование происходит путем перестановки букв исходной цепочки по следующему правилу. Фиксируем два натуральных числа a и b . Буква с номером n в исходной цепочке должна в зашифрованной цепочке иметь номер, равный остатку от деления числа $a \cdot n + b$ на L (с одним исключением: если $a \cdot n + b$ нацело делится на L , то остаток полагается равным L). Например, если длина цепочки $L = 25$ и $a = 9$, $b = 11$, то третья буква исходной цепочки будет тринадцатой в зашифрованной цепочке (так как $9 \cdot 3 + 11 = 38$, а число 38 дает остаток 13 при делении на 25). Известно, что в результате применения этого метода зашифрования к цепочке из 43 букв

светитнезнакомаязвездасновамыоторваныотдома

была получена цепочка

таытоеонсоовзмевтрадазедвмаянтоаысзаимнонвк

При этих же значениях a , b проведено зашифрование еще одной цепочки из 38 букв. Получилось вот что:

видхврлмаояоооаоддсемдрониввоеозтообнзо

Найдите значения a и b и восстановите исходное сообщение.

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады (все факультеты)

1 (4 балла). Тройник из трех вертикальных открытых в атмосферу трубок и одной горизонтальной трубки целиком заполнен водой (рис.1). После того как тройник стали двигать в горизонтальном направлении с некоторым постоянным ускорением a (при этом все трубки остаются в одной и той же плоскости), из него вылилось $9/32$ всей первоначально содержавшейся воды. Чему равно ускорение a ? Все трубки имеют одну и ту же длину и один и тот же диаметр, причем малый по сравнению с их длиной. Капиллярные явления не учитывать.

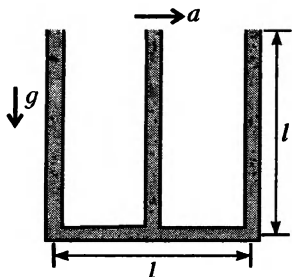


Рис. 1

2 (3 балла). Бруски массами m_1 и m_2 соединены легкой пружиной и прикреплены с помощью легкой нити к упору A на неподвижной гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис.2). Система покоится. Найдите направление и модуль ускорения бруска массой m_1 сразу после пережигания нити. Нить и ось пружины параллельны наклонной плоскости.

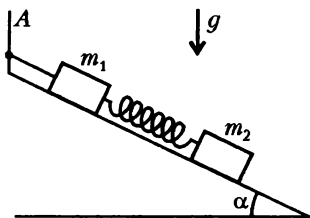


Рис. 2

3 (4 балла). В вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь сечения которого S , под поршнем массой m находится одноатомный газ, разделенный горизонтальной перегородкой на два одинаковых объема высотой h каждый. Давление газа в нижней части сосуда p , атмосферное давление p_0 , температура газа в обеих частях сосуда одна и та же. На сколько сместится поршень, если убрать перегородку и дождаться установления равновесия? Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Трением пренебречь.

Давление газа в нижней части сосуда p , атмосферное давление p_0 , температура газа в обеих частях сосуда одна и та же. На сколько сместится поршень, если убрать перегородку и дождаться установления равновесия? Стенки сосуда и поршень не проводят тепло. Трением пренебречь.

4 (3 балла). Чему равна энергия взаимодействия W системы трех точечных зарядов $q_1 = 2$ мкКл, $q_2 = 1$ мкКл, $q_3 = 3$ мкКл, расположенных в указанном порядке вдоль прямой линии, если расстояние между соседними зарядами $a = 30$ см? Постоянная $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

5 (4 балла). Два вольтметра, соединенные между собой последовательно, при подключении к зажимам ненагруженного аккумулятора показывают напряжения U_1 и U_2 соответственно. При подключении к аккумулятору только первого вольтметра он показывает напряжение U_3 . Определите ЭДС аккумулятора \mathcal{E} .

6 (3 балла). Чему равен предельный угол полного внутреннего отражения $\theta_{\text{пр}}$ при переходе луча из стекла в воздух, если скорость света в воздухе $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, в стекле $v = 2 \cdot 10^8$ м/с? Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

7 (3 балла). В сосуде объемом $V = 180$ л при температуре $T = 390$ К и давлении $p = 90$ кПа находится смесь газов, состоящая из $\nu_1 = 2$ моль гелия и некоторого количества неона. Найдите число молей неона ν_2 в смеси. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. С вершины наклонной плоскости высотой $h = 5$ м и углом наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$ начинает соскальзывать тело. Определите скорость тела v в конце спуска, если коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0,19$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Масса пушки с ядром $M = 848$ кг. Ядро массой $m = 48$ кг вылетает из пушки с начальной скоростью $v = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найдите скорость V , которую приобретает пушка в результате отдачи. Трением пренебречь.

3. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью $C = 2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 3$ мГн, происходят гармонические колебания. Амплитудное значение заряда конденсатора $q_m = 6$ мкКл. В определенный момент времени сила тока в контуре равна $I = 24$ мА. Найдите заряд конденсатора q в этот момент.

4. В сосуде находится идеальный газ при температуре $t = 127$ °С. В результате утечки масса газа в сосуде уменьши-

лась на $\eta = 20\%$, а температура понизилась на $\Delta t = 100^\circ\text{C}$. Найдите, во сколько раз n уменьшилось давление газа. Изменением объема сосуда пренебречь.

5. На каком расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием $F = -25$ см надо поместить предмет, чтобы его изображение получилось в $\Gamma = 5$ раз меньше самого предмета?

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Тело соскальзывает с нулевой начальной скоростью с наклонной плоскости высотой $h = 5$ м и длиной $s = 13$ м. Коэффициент трения $\mu = 0,4$. Найдите время движения тела t вдоль наклонной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. В платформу с песком, стоящую на гладких рельсах на горизонтальной поверхности, попадает снаряд, летевший горизонтально со скоростью $v = 300 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению рельсов, и застревает в ней. Отношение массы платформы к массе снаряда $n = 29$. Найдите скорость движения платформы по рельсам V после попадания снаряда.

3. В колебательном контуре радиоприемника происходят гармонические колебания. Амплитудное значение силы тока $I_m = 24 \text{ мА}$, амплитудное значение заряда конденсатора $q_m = 6 \text{ нКл}$. Найдите длину волны λ , на которую настроен приемник. Скорость распространения электромагнитных волн $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

4. В сосуде находится идеальный газ при температуре $t = 37^\circ\text{C}$. В результате утечки масса газа в сосуде уменьшилась на $\eta = 14\%$, а давление газа уменьшилось на $\delta = 17\%$. Найдите, на какую величину Δt уменьшилась температура газа. Изменением объема сосуда пренебречь.

5. Предмет высотой $h = 30$ см расположен перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $d = 80$ см от линзы с фокусным расстоянием $F = -20$ см. Определите высоту изображения H .

Вариант 3

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела, связанные легкой горизонтальной пружиной жесткостью $k = 230 \text{ Н/м}$ (рис.3). На тело массой $m_1 = 3 \text{ кг}$ действует сила

$F = 20$ Н, направленная вверх под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Масса второго тела $m_2 = 2$ кг. Тела движутся так, что пружина растянута на некоторую постоянную величину x . Найдите x .



Рис. 3

2. На горизонтальной поверхности лежит брусок массой $M = 0,5$ кг. В него попадает пуля массой $m = 0,009$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 500$ м/с. Пробив брусок насквозь, пуля вылетает со скоростью $v_2 = 200$ м/с. Коэффициент трения между бруском и горизонтальной поверхностью $\mu = 0,5$. Найдите путь s , пройденный бруском до полной остановки. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. Определите сопротивление резистора R , если вольтметр с внутренним сопротивлением $r = 2500$ Ом, подключенный к концам резистора, показывает напряжение $U = 100$ В, а суммарная сила тока на участке цепи между точками подключения $I = 5$ А.

4. Один моль кислорода ($\nu = 1$ моль) нагревается при постоянном объеме от температуры $T = 273$ К. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить кислороду, чтобы его давление увеличилось в $n = 3$ раза? Удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме $c_V = 657$ Дж/(кг·К), его молярная масса $M = 0,032$ кг/моль.

5. В непрозрачной ширме сделано отверстие, в которое вставлена собирающая линза. На главной оптической оси на расстоянии $d = 10$ см от линзы помещен точечный источник света. По другую сторону линзы на таком же расстоянии d от нее на пути сходящегося пучка лучей поставлен перпендикулярно главной оптической оси экран. На экране видно светлое пятно, диаметр которого в $n = 2$ раза меньше, чем диаметр линзы. Определите фокусное расстояние линзы F .

Вариант 4

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела, связанные легкой горизонтальной пружиной. На тело массой $m_1 = 2$ кг действует сила $F = 48$ Н, направленная вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис.4). Масса

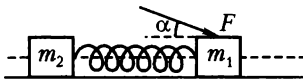


Рис. 4

второго тела $m_2 = 4$ кг. Тела движутся так, что пружина растянута на постоянную величину $x = 79$ см. Найдите жесткость пружины k .

2. На горизонтальной поверхности лежит брусок. В него попадает пуля массой $m = 0,015$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 500$ м/с. Пробив брусок насквозь, пуля вылетает со скоростью $v_2 = 200$ м/с. Коэффициент трения между бруском и горизонтальной поверхностью $\mu = 0,4$. Путь, пройденный бруском до полной остановки, $s = 7$ м. Найдите массу бруска M . Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. К источнику постоянного напряжения подключен резистор сопротивлением $R = 5$ Ом. Для измерения силы тока в цепь включили амперметр с внутренним сопротивлением $r = 2,5$ Ом, и он показал силу тока $I = 2$ А. Какова была сила тока в цепи I_0 до включения амперметра?

4. Какое количество теплоты Q требуется для того, чтобы воздух массой $m = 5$ г нагреть от температуры $T = 290$ К при постоянном давлении настолько, чтобы его объем увеличился в $n = 2$ раза? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 1018$ Дж/(кг · К).

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 25$ см от нее. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, ее диаметр $a = 5$ см. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси помещается экран так, что на нем получается четкое изображение источника. Затем экран перемещают вдоль главной оптической оси на $l = 5$ см по направлению к линзе. Определите диаметр b светлого кружка на экране.

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур, А.Зязин

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Камень, брошенный с крыши дома вверх под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с, упал на землю через $t = 3$ с. Определите высоту H дома. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Небольшой шарик подвешен на легкой нерастяжимой нити в ракете, находящейся на стартовой площадке. Во сколько раз изменится сила натяжения нити при вертикальном старте ракеты с ускорением $a = 20$ м/с²?

3. Монета скользит по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0 и сталкивается с такой же, но покоящейся монетой. Считая удар центральным и абсолютно упругим, определите расстояние s между монетами после их остановки. Коэффициент трения между каждой монетой и столом μ , ускорение свободного падения g .

4. При увеличении температуры водорода от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 2400$ К все молекулы распались на атомы. Во сколько раз n возросла при этом среднеквадратичная скорость частиц газа?

5. При сообщении некоторой массе воды m количества теплоты $Q = 2,5$ МДж она нагрелась от температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до кипения, и при этом испарилась часть воды, составляющая $\delta = 20\%$ исходной массы. Определите m .

6. В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вверх, находится в равновесии пылинка массой $m = 3 \cdot 10^{-5}$ г с зарядом $q = 3$ нКл. Определите величину E напряженности поля.

7. Когда через батарейку с ЭДС $\mathcal{E} = 1,6$ В течет ток $I = 200$ мА, напряжение на ее выводах равно $U = 1,4$ В. Найдите внутреннее сопротивление r батарейки.

8. Заряженная частица, пройдя в однородном электрическом поле разность потенциалов $U = 1$ кВ, увеличила начальную скорость $v_0 = 5 \cdot 10^5$ м/с в $n = 3$ раза и попала в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ мТл. В магнитном поле она начала двигаться по окружности. Определите радиус R этой окружности.

9. Расстояние между предметом и линзой с оптической силой $D = 5$ дптр равно $d = 0,4$ м. Постройте ход лучей, формирующих изображение предмета, и определите расстояние f между изображением и линзой.

10. При уменьшении в 2 раза длины волны света, падающего на цинковую пластинку, максимальная кинетическая энергия вылетающих электронов увеличилась в 3 раза. Определите работу выхода A (в эВ) электронов из цинка, если первоначальная энергия фотонов $E = 8,4$ эВ.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²

Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)

Удельная теплота парообразования воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг

Вариант 2

1. Во сколько раз изменится центростремительное ускорение точек обода колеса, если период обращения колеса уменьшится в $n = 5$ раз?

2. Однородный шар плавает в воде, погруженный в нее наполовину. Найдите объем V шара, если на него действует выталкивающая сила $F = 5$ Н.

3. Брусok, двигавшийся по горизонтальной поверхности со скоростью v_0 , испытал абсолютно неупругий удар с неподвижным бруском той же массы. Какое расстояние s пройдут бруски после столкновения до остановки? Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ . Ускорение свободного падения g . Бруски движутся поступательно.

4. При торможении в атмосфере планеты температура внутри спускаемого аппарата увеличилась от $t_1 = 17$ °С до $t_2 = 67$ °С. Какую часть δ воздуха необходимо выпустить, чтобы давление внутри аппарата не изменилось?

5. Лед массой $m = 1$ кг при температуре $t_0 = 0$ °С был расплавлен за время $\tau = 1000$ с при помощи нагревателя мощностью $P = 660$ Вт. Определите КПД η нагревателя.

6. Расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора уменьшили в $n = 2$ раза, не отключая его от источника

напряжения. Во сколько раз изменилась при этом напряженность электрического поля конденсатора?

7. Из проволоки сопротивлением $r = 4$ Ом спаяли квадрат. Определите сопротивление R между двумя соседними вершинами квадрата.

8. Протон в магнитном поле с индукцией $B = 0,01$ Тл движется по дуге окружности радиусом $R = 10$ см. После вылета из магнитного поля протон полностью тормозится электрическим полем. Определите величину U тормозящего напряжения.

9. Расстояние между предметом и собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 25$ см равно $d = 0,2$ м. Постройте ход лучей, формирующих изображение предмета, и определите расстояние f между изображением и линзой.

10. Работа выхода электронов из алюминия $A_1 = 3,74$ эВ, а из цезия $A_2 = 1,89$ эВ. Найдите отношение λ_2/λ_1 длин волн, соответствующих красным границам фотоэффекта для этих металлов.

Физические постоянные

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг

Отношение заряда протона к его массе $e/m = 0,96 \cdot 10^8$ Кл/кг

Публикацию подготовили А.Берестов, С.Куклин

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Н.Э.БАУМАНА**

МАТЕМАТИКА

Олимпиада-2009

Вариант 1

1. Один велосипедист проезжает за час на 6 км больше, чем другой, так как один километр он проезжает на 20 секунд быстрее. Найдите скорости велосипедистов.

2. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2} \sin x = 0$.

3. Решите уравнение $(\log_2(7 - 6x))\log_x(1/2) = 1$.

4. Решите неравенство $\frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} > \frac{1}{x + 2}$.

5. Решите неравенство $\left(\log_2 \frac{5x + 4}{4x}\right) \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} < 0$.

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \log_{0,5}(3 + \cos x).$$

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CK . Медиана CM треугольника ACK равна $\sqrt{13}$, а медиана CN треугольника BCK равна $\sqrt{21}$. Найдите площадь треугольника ABC .

8. Траектории, по которым движутся снаряды зенитного орудия, задаются уравнением $y = px - 0,5(1 + p^2)x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, где параметр p ($0 < p < +\infty$) определяется наклоном траектории в начальной точке. Может ли снаряд попасть в точку $M(3/4; 1/4)$? Укажите на плоскости xu все точки, через которые проходят траектории.

9. Укажите все значения a , при которых уравнение $64a(x - 10) + 384 = (x + |x|)^{\frac{1}{2}}$ имеет хотя бы одно решение, и решите его при каждом a .

10. Правильная треугольная призма с высотой h и стороной основания $\sqrt{6}h$ вписана в конус так, что одно из оснований лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания – на боковой поверхности. В свою очередь, конус должен быть вписан в сферу возможно меньшего радиуса. При какой высоте конуса радиус описанной около него сферы будет наименьшим? Найдите это значение радиуса.

Вариант 2

1. Партию обуви, купленную за 180 тыс. рублей, в первую неделю продавали по цене, большей закупочной на 25%, затем наценка была снижена до 16% от закупочной цены; а вся партия обуви была продана на 20% дороже, чем куплена. На какую сумму продали обуви в первую неделю?

2. Решите уравнение $|\cos x| + \sin 2x = 0$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии 100, 97, 94, ...?

4. Решите уравнение $(\log_3 x) \log_4 (x/3) = \log_2 3$.

5. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x} + 4}{1 - \sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x} + 13}{x - 5\sqrt{x} + 4}$.

6. Функция $f(x) = c/(x - c)$ определена на отрезке $[1; 3]$. Найдите все значения c , при которых наименьшее значение функции на этом отрезке меньше $-0,25$.

7. Площадь треугольника ABC равна $49\sqrt{3}/4$, сторона AB равна 7, угол B равен 60° . На сторонах AB , BC и AC выбраны точки K , L и M так, что $AK : KB = 2 : 5$, $BL : LC = 1 : 6$, $AM : MC = 4 : 3$. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KLM .

8. Какую наибольшую площадь может иметь фигура на плоскости xy , расположенная между прямыми $x = -3$ и $x = 1$ и ограниченная снизу осью x , а сверху – касательной к графику функции $y = x^2 + 16$ с абсциссой x_0 точки касания, лежащей в промежутке $-3 \leq x_0 \leq 1$?

9. Укажите все значения параметра p , при которых система уравнений

$$y^2 - 6y + 10 = 5|x|/x, \quad y + 1 - p = (x - p)^2$$

имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения.

10. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота равна $4R/3$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходя-

щей через медиану основания? Найдите отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.

ФИЗИКА

Олимпиада-2009

Тур 1

Вариант 1

1. Точка движется по оси x по закону $x = 8 + 12t - 3t^2$ (м). Определите величину скорости точки при $t = 1$ с.

2. Тело массой $m = 1$ кг движется по горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10$ Н, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис.1). Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0,4$. Определите силу трения $F_{\text{тр}}$ действующую на тело.

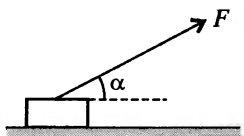


Рис. 1

3. Скорость брошенного мяча v_1 непосредственно перед ударом о стену была вдвое больше его скорости v_2 сразу после удара. Найдите кинетическую энергию мяча перед ударом, если при ударе выделилось количество теплоты $Q = 15$ Дж.

4. На рисунке 2 показан цикл тепловой машины, состоящий из изотермического расширения 1-2, изохорического процесса 2-3 и адиабатного сжатия 3-1. Запишите уравнение первого начала термодинамики для процесса 1-2.

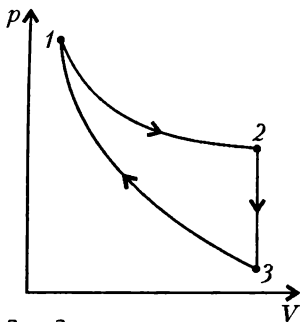


Рис. 2

5. Напишите формулу для вычисления количества теплоты, выделяю-

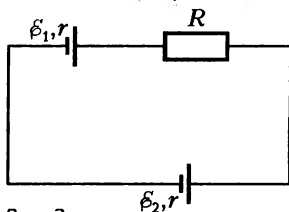


Рис. 3

щегося во внешней электрической цепи, показанной на рисунке 3, за время Δt . Параметры элементов цепи считать известными.

6. Две частицы, имеющие отношение зарядов $\frac{q_2}{q_1} = 4$ и отношение масс $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2}$, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям индукции и движутся по окружностям. Определите отношение радиусов траекторий $\frac{r_2}{r_1}$ частиц, если отношение их скоростей $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$.

7. Источник света S находится на главной оптической оси линзы (рис.4). Постройте дальнейший ход луча SA и определите положение изображения S' источника, даваемого линзой.

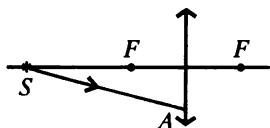


Рис. 4

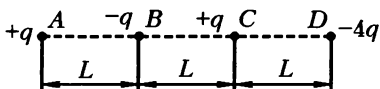


Рис. 5

8. В точках A, B, C, D расположены неподвижные точечные заряды $+q, -q, +q, -4q$, как показано на рисунке 5. Определите работу, которую необходимо совершить для перемещения заряда $-q$ из точки B в бесконечность, где потенциал электрического поля принимается равным нулю.

9. Удаленный от других тел серебряный шарик освещается электромагнитным излучением. Определите длину волны λ этого излучения, если известно, что максимальный потенциал, до которого зарядился шарик, равен $\phi = 6,07$ В. Для серебра работа выхода $A = 4,28$ эВ.

10. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы $3m$ и $2m$, соединенные ненапряженной пружиной (рис.6). Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой $2m$, чтобы сдвинулся и другой брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость μ .



Рис. 6

Вариант 2

1. Однородный стержень массой m и длиной L опирается в точке C на опору, как показано на рисунке 7. Определите массу M груза, который нужно прикрепить с помощью невесомой нити к концу B стержня, чтобы он находился в равновесии в горизонтальном положении.

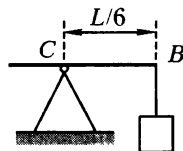


Рис. 7

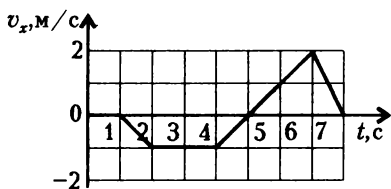


Рис. 8

2. Тело массой $m = 1$ кг движется вдоль оси x со скоростью, проекция которой v_x как функция времени t представлена на графике (рис.8). Определите модуль равнодействующей всех сил, действующих на тело, в момент времени $t = 6$ с.

3. Тело брошено с поверхности земли вверх с начальной скоростью v_0 . Принимая потенциальную энергию тела на поверхности земли равной нулю, найдите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна половине потенциальной энергии. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. В трех вершинах квадрата со стороной a расположены точечные заряды $+2q$, $+3q$, $-2q$ (рис.9). Определите потенциал электрического поля ϕ в четвертой вершине квадрата.

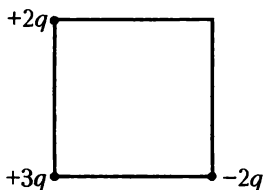


Рис. 9

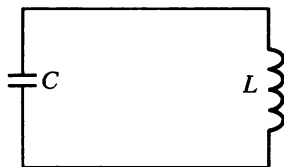


Рис. 10

5. Как изменится период колебаний в колебательном контуре, состоящем из плоского воздушного конденсатора и катушки индуктивности (рис.10), если между обкладками конденсатора поместить металлическую пластину, занимающую часть объема конденсатора? Ответ поясните.

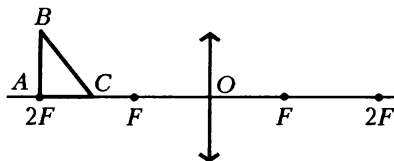


Рис. 11

6. Постройте изображение предмета ABC (рис.11) в собирающей линзе.

7. Во сколько раз энергия фотона рентгеновского излучения с длиной волны

$\lambda_1 = 0,1$ нм больше энергии фотона видимого света с длиной волны $\lambda_2 = 0,4$ мкм?

8. Найдите работу A , которую нужно совершить над одним молем идеального газа для его изобарного сжатия, при котором концентрация молекул в конечном состоянии в $\alpha = 2$ раз больше,

чем в начальном. Первоначальная температура газа $T_1 = 300 \text{ К}$.

9. Конденсаторы емкостями C и $2C$ и резисторы, сопротивления которых равны R , включены в электрическую цепь, как показано на рисунке 12. Найдите установившийся заряд на конденсаторе емкостью C , если ЭДС источника тока равна \mathcal{E} , а его внутренним сопротивлением можно пренебречь.

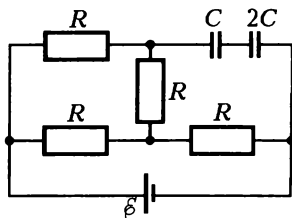


Рис. 12

10. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис.13). Скорость перемычки постоянна и равна v . Шины замкнуты на сопротивление R . Расстояние между шинами L . Система находится в однородном магнитном поле, линии индукции поля перпендикулярны плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найдите индукцию B магнитного поля.

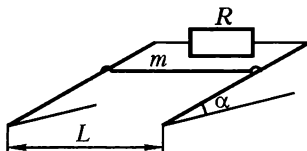


Рис. 13

Тип 2

Вариант 3

1. На неподвижное тело массой m , находящееся на горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, направленная вдоль горизонтальной оси x . На рисунке 14 представлен график зависимости проекции F_x этой силы от времени t . Определите модуль импульса тела в момент времени $t = 4t_0$.

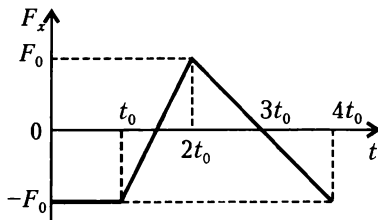


Рис. 14

2. Что такое плазма? Назовите известные вам способы получения плазмы.

3. В результате кругового процесса газ совершил работу $A = 1 \text{ Дж}$ и передал охладителю количество теплоты $Q_2 = 4,2 \text{ Дж}$. Определите термический КПД η цикла.

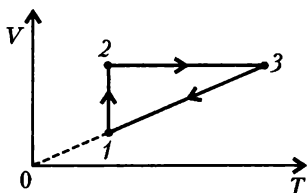


Рис. 15

4. Изменения состояния идеального газа при некотором круговом процессе 1-2-3-1 показаны на графике зависимости объема газа от абсолютной температуры (рис.15). Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает тепло извне.

5. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q . Определите потенциал ϕ в точке A , находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на $h = 0,5R$.

6. Допишите ядерную реакцию:

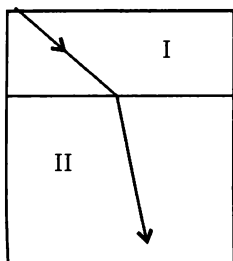
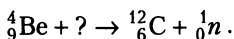


Рис. 16

7. На рисунке 16 показан ход светового луча при переходе из среды I в среду II. В какой среде скорость света больше? Ответ обоснуйте.

8. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы

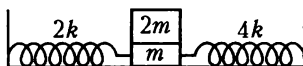


Рис. 17

(рис.17), состоящей из двух брусков и двух невесомых пружин, при которой бруски будут совершать колебания по горизонтальной плоскости без проскальзывания относительно друг друга. Жесткости пружин $2k$ и $4k$. Масса нижнего бруска m , верхнего $2m$, коэффициент трения между брусками μ . В положении равновесия пружины не деформированы. Трение между нижним бруском и плоскостью отсутствует.

9. Стержень OA сопротивлением $R = 1$ Ом и длиной $L = 0,5$ м, вращаясь вокруг точки O , скользит по полукольцу, образуя проводящий контур (рис.18).

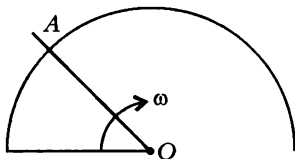


Рис. 18

Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна вектору \vec{B} . Угловая скорость вращения стержня $\omega = 2\pi \text{ с}^{-1}$. Найдите количество теплоты Q , которое вы-

делится в стержне при его повороте на угол $\Delta\varphi = \pi/2$. Сопротивлением остальных проводников контура пренебречь.

10. На горизонтальной поверхности расположены три маленьких одноименно заряженных шарика, заряды которых q , $2q$, q , а массы $2m$, m , $2m$ соответственно (рис.19). Шарiki соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной L каждая так, что нити образуют равносторонний треугольник. Нить между шариками 1 и 3 пережигают. Пренебрегая гравитационным взаимодействием между шариками и силами трения, найдите максимальную скорость шарика 2.

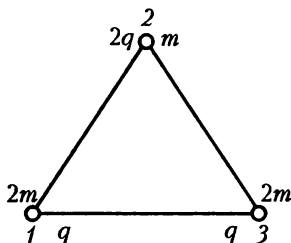


Рис. 19

Вариант 4

1. Какие носители тока являются неосновными в акцепторном полупроводнике?

2. Пятая часть однородной линейки, имеющей массу m и длину L , выступает за край стола (рис.20). Найдите минимальную работу A , которую необходимо совершить, чтобы переместить всю линейку на стол, сдвигая ее силой, направленной вдоль длинной стороны.

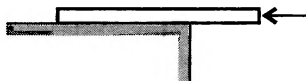


Рис. 20

3. Тело брошено с поверхности земли вверх с начальной скоростью v_0 . Принимая потенциальную энергию тела на поверхности земли равной нулю, найдите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна потенциальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Определите внутреннюю энергию U неона, находящегося в баллоне объемом $V = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ под давлением $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

5. Стержень OA сопротивлением R и длиной L скользит по полукольцу (рис.21). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B , линии которой перпендикулярны плоскости контура. В контур включен источник тока с ЭДС \mathcal{E} . Угловая скорость вращения стержня ω . Найдите количество теплоты Q , которое выделится в стержне при его

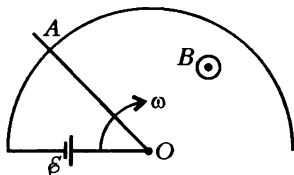


Рис. 21

повороте на угол $\Delta\varphi = \pi/4$. Сопротивлением остальных проводников и источника тока пренебречь.

6. Предмет расположен на расстоянии $d = 0,15$ м от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0,3$ м. На каком

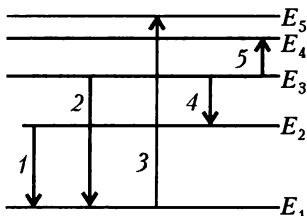


Рис. 22

расстоянии f от линзы получается изображение данного предмета?

7. На рисунке 22 представлена схема энергетических уровней атома. Какой цифрой обозначен переход с поглощением фотона наименьшей частоты?

8. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным. Напряженность результирующего электрического поля слева от пластины $E_1 = 5 \cdot 10^4$ В/м, а справа $E_2 = 3 \cdot 10^4$ В/м (рис.23). Определите заряд q пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, равна $F = 0,7$ Н.

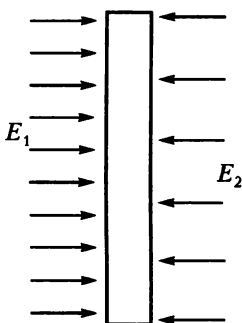


Рис. 23

9. Стандартный компакт-диск представляет собой залитую прозрачным пластиком тонкую металлическую пластинку диаметром $D = 12$ см, на пластинку штамповкой нанесено множество микроскопических углублений, в каждом из которых закодирован один бит информации. Найдите наибольшую длину волны лазера, используемого для считывания информации в дисковомode для компакт-дисков, если известно, что полезная емкость одного диска составляет $W = 640$ Мбайт. При записи используется вся поверхность одной стороны диска.

10. По металлической ленте, толщина которой h , течет ток I (рис.24). Лента помещена в однородное магнитное поле, индукция которого равна B и направлена перпендикулярно поверхности ленты. Определите разность потенциалов между точками A и C ленты, если концентрация свободных электронов в металле n .

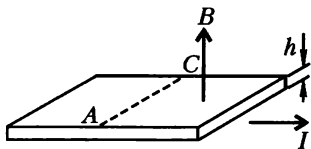


Рис. 24

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(механико-математический факультет;
письменно-устный экзамен)

Письменный тур

1. Найдите все значения переменной x , при которых все указанные функции

$$y = \sqrt{11 + 24x - 17x^2}, \quad y = \arccos(x^2 - 2x + 1), \quad y = \log_3(x^2)$$

имеют смысл и хотя бы одна из них обращается в нуль.

2. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

3. Окружность радиуса 2 с центром на основании равнобедренного треугольника касается его боковых сторон. Одну из точек касания соединили отрезком с противоположащей вершиной основания. Этот отрезок делится высотой треугольника, проведенной к основанию, в отношении 4 : 3, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

4. Найдите все целые значения x из отрезка $[19; 29]$, удовлетворяющие неравенству $\frac{a^6 + 8a^5 - 2}{a^x} \leq 1$, где a – корень уравнения $y^{17} + 2y^{11} + 4y^5 = 1$.

Устный тур

5. (i) Сформулируйте и докажите формулы преобразования суммы и разности синусов в произведение, суммы и разности косинусов в произведение.

(ii) Решите уравнение $\cos 4x + \sin\left(2x - \frac{a\pi}{64}\right) = \sin 3x$, где a – наименьшее из таких двузначных натуральных чисел, при приписывании которых справа к числу 20092009 полученное десятизначное число делится на 36.

6. Наибольшая сторона четырехугольника равна 3, наименьшая сторона равна 1. Найдите остальные его стороны, если известно, что тангенсы всех четырех внутренних углов четырехугольника равны между собой.

Вариант 2

(механико-математический факультет; письменно-устный экзамен)

Письменный тур

1. Найдите все значения аргумента x , при каждом из которых

соответствующее значение функции $f(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi(15+x)}{6} + 1}{\sqrt{14 + 5x - x^2}}$

положительно.

2. В некоторой компании каждый сотрудник либо правдивец (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Каждого из сотрудников спросили про каждого из остальных, правдивец тот или лжец. Всего было получено 32 ответа «правдивец» и 40 ответов «лжец». На сколько отличается в этой компании количество сотрудников-правдивцев от количества сотрудников-лжецов?

3. В треугольнике ABC сторона AB равна 38, а медиана CM наклонена к AB под углом 40° и равна 19. В этот треугольник вписана окружность. Найдите периметр треугольника, вписанного в эту окружность и подобного треугольнику ABC .

4. При всех значениях параметра c решите систему

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} \leq 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

Устный тур

5. (i) Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

(ii) Окружность радиуса 2 вписана в равнобоковую трапецию. Точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1 : 4. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите все значения параметра c , при каждом из которых множество точек координатной плоскости, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16x + 10y + 65 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 14x + 12y + 79 \leq 0, \\ (x - c)(y + c) = 0, \end{cases}$$

является отрезком.

Вариант 3

(факультет биоинженерии и биоинформатики; письменный экзамен)

1. Решите неравенство $\frac{x^2 + 3x + 7}{x - 3} \geq -1$.

2. Решите уравнение $|x^2 - 5x + 3| = x - 3$.

3. Решите неравенство $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0$.

4. Решите уравнение $8 \cos^2(5x) - 4 \cos^2(10x) = 1$.

5. Центр описанной около треугольника окружности лежит на одной из сторон этого треугольника, а длины сторон этого треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите тангенс наименьшего угла этого треугольника.

6. Решите уравнение

$$\log_{(20+x^2)} \sin(\pi x) = -3 \log_{(20-x^2)} (\sqrt{x+2\sqrt{x}+1} - \sqrt{x}).$$

7. На одном из оснований прямого кругового цилиндра отмечена точка A , а на другом – точка B , длина отрезка AB равна 17. Известно, что высота этого цилиндра не превосходит 15, а сумма площадей оснований не превосходит 32π . а) Чему может равняться объем этого цилиндра? б) Какова минимально возможная площадь поверхности шара, содержащего такой цилиндр?

8. Найдите все значения y , при каждом из которых числа

$$\cos(\arcsin(y+1)), |y+1|, 2^{y^2+2y+2},$$

взятые в некотором порядке, являются подряд идущими членами некоторой арифметической прогрессии.

9. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $b \cdot 3^{-2x} + b + 1 = -3^{-4x-1}$ имеет ровно два корня, больший из которых не меньше $\frac{1}{2}$.

Вариант 4

(письменный экзамен для тех, кто не сдавал ЕГЭ;
факультеты: механико-математический, химический, физико-химический, биологический, почвоведения, биоинженерии и биоинформатики, географический, наук о материалах, социологический, филологический, психологии)

1. Что больше:

$$\frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25})}{25(5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{2})} \text{ или } \left(\frac{3}{25} - 0,29\right) \cdot \frac{25}{26} : \frac{17}{4} ?$$

Ответ обоснуйте.

2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+5}{1-x}} - \frac{3}{x^2-4}$.

3. Суммарное количество жителей в четырех деревнях равно 2009. Количество жителей в деревне А относится к количеству жителей в деревне Б как 2 : 3, количество жителей в деревне Б к количеству жителей в деревне В – как 4 : 5, количество жителей в деревне В к количеству жителей в деревне Д – как 5 : 2. а) Найдите количество жителей деревни Д. б) На сколько процентов количество жителей деревни Д меньше, чем количество жителей деревни А?

4. Трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны, вписана в окружность. Найдите площадь этой трапеции, если ее средняя линия равна $\sqrt{7}$.

5. Решите неравенство $\sqrt{4x^3 - 9x^2 + 2} - \sqrt{x - x^2} > 0$.

6. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = |\sin 2x|^{-1}$.

7. Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$|8 + x| \left(\log_{\frac{1}{3}}(x + 16) + 2 \right) \left(\log_3 x^2 - 4 \right) \geq 0.$$

8. Найдите минимально возможное значение площади полной поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой расстояние от середины высоты, опущенной на основание, до боковой грани равно 2.

9. Найдите все натуральные числа, которые оканчиваются на 1837 (год смерти А.С.Пушкина), а после вычеркивания последних четырех цифр уменьшаются в целое число раз.

Публикацию подготовили А.Бегуни, В.Галатенко,
А.Зеленский, М.Юмашев

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В течение ряда лет Московский инженерно-физический институт – ныне Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – проводит Всероссийскую отраслевую физико-математическую олимпиаду Госкорпорации «Росатом» (Олимпиада «Росатом»). Олимпиада проводится в несколько туров с декабря по апрель в Москве, а также в научных и промышленных центрах Госкорпорации «Росатом» (Саров, Снежинск, Обнинск, Новоуральск, Балаково и др.). Ниже приводятся варианты заданий одного из туров олимпиады «Росатом» этого года по математике и физике.

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1+x}}{x-1} \geq \frac{5-x}{x-1}$.

2. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = \frac{2|x - \frac{7\pi}{2}|}{x - \frac{7\pi}{2}}$.

3. Определите, при каких значениях x величины $5 \cdot 2^x$, $10 - \sqrt{x^2 - 1}$ и $20 \cdot 2^{-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ 2 \sin(4x + 8y) \sin(3x + 10y) + 2 \cos(7x + 2y) = 4. \end{cases}$$

5. Определите, при каких значениях параметра a пересечение множеств $(x - a + 1)^2 + (y - 2a - 3)^2 \leq 80$ и $(x - 2a + 3)^2 + (y - 4a + 1)^2 \leq 20a^2$ представляет собой круг. Постройте график при $a = 2$.

6. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые ребра SA , SB и SC

перпендикулярны и имеют длину 3. Длина ребра SD равна 9. Найдите: 1) угол наклона ребра SD к плоскости основания; 2) наибольший возможный объем пирамиды $SABCD$.

ФИЗИКА

1. Тело массой m , движущееся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает на пружину жесткостью k , второй конец которой закреплен (рис.1). На какую величину

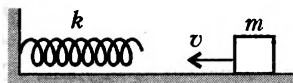


Рис. 1

сожмется пружина к тому моменту времени, когда скорость тела уменьшится вдвое? Трение отсутствует.

2. Постройте изображение точечного источника S в тонкой собирающей линзе (рис.2). Источник расположен на расстоянии $3F$ от плоскости линзы и на расстоянии x от ее главной оптической оси. Найдите расстояние от изображения источника до главной оптической оси.

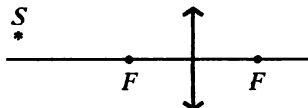


Рис. 2

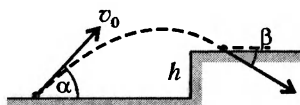


Рис. 3

3. Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . В процессе движения тело попадает на ступеньку высотой h (рис.3). Под каким углом β тело подлетает к ступеньке?

4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах $p - V$ приведен на рисунке 4. Найдите КПД процесса. Все необходимые величины даны на рисунке.

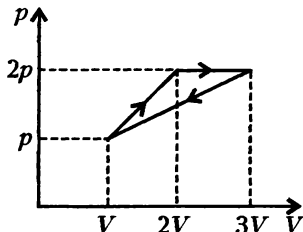


Рис. 4

5. Параллельные горизонтальные рельсы длиной L с сопротивлением единицы длины ρ закреплены параллельно друг другу на расстоянии l друг от друга. К концам рельсов присоединены две батареи: одна с ЭДС \mathcal{E} , вторая с ЭДС $2\mathcal{E}$ (рис.5).

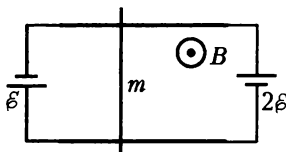


Рис. 5

На рельсы кладут перемычку массой m , которая может скользить вдоль рельсов. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B . На каком расстоянии от левого края рельсов находится положение равновесия перемычки? Найдите период малых колебаний перемычки около положения равновесия. Трением, сопротивлением перемычки, источников и проводов, а также индуктивностью цепи пренебречь.

Публикацию подготовили А.Баскаков, С.Муравьев

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Физтех-2009»)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3}(4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8) = 2, \\ \log_{x-4}(x^2 - 6x - y + 13) = 2. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\left| 2^{\sqrt{x-2}-2} - 2 \right| + \frac{10}{3} \leq \frac{2^{\sqrt{x-2}+2}}{3} - 4^{\sqrt{x-2}-2}.$$

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8 \sin x \sin 3x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K , L , M лежат на отрезках $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ соответственно так, что

$$\frac{A_1 K}{KB} = \frac{B_1 L}{LC} = \frac{C_1 M}{MD} = \frac{5}{3}.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ в точках K , L , M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , расстояние от центра сферы до плоскости KLM , и объем призмы.

5. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и AOC_1 , а также радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1 .

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2x - 4y - 3z, \\ y^2 - z^2 = -x + 3y + 4z, \\ z^2 - x^2 = 3x - y - 5z. \end{cases}$$

Вариант 2

(олимпиада «Физтех-2009», выезд)

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2 \cos x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \sqrt{x^2 - 9y^2}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} - 2x - 4y} = 1 + 4y. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{|x|}(\sqrt{5-x} + 4) \geq 2 \log_{x^2}(8-2x).$$

4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K , L , M лежат на отрезках $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ соответственно так, что

$$\frac{A_1 K}{KB} = \frac{B_1 L}{LC} = \frac{C_1 M}{MD} = \frac{7}{3}.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых $A_1 B$, $B_1 C$, $C_1 D$ в точках K , L , M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , расстояние от центра сферы до плоскости KLM , и объем призмы.

5. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , а точка E лежит на отрезке AD . Известно, что углы ABE , DBE и CBD

равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE . Найдите углы CBD и BAC .

6. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + a = 0, \\ x^2 + y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 = yz + x, \\ 2y^2 = xz + y, \\ 2z^2 = xy + z. \end{cases}$$

Вариант 3

(вступительный экзамен для иностранцев)

1. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, высота BO равна 8, угол ABC равен $\arccos\left(-\frac{161}{289}\right)$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , и расстояние от центра этой окружности до точки пересечения высот треугольника ABC .

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 6x - \frac{1}{\cos 6x} = \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\cos 2x} - \frac{\sin 8x}{\cos 2x \cos 6x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left| \log_{x+2} 2 + \log_2 \frac{x+2}{2} \right| + \left| \log_2 (2x+4) + \log_{x+2} 2 \right| < 5.$$

4. На ребре AB треугольной пирамиды $ABCD$ выбрана точка X такая, что $AX : XB = 2$. Точки K и L – проекции точки X на плоскости ACD и BCD соответственно. Известно, что $KC = 2$, $KD = 7$, $KA = 11$, $LC = 6$, $LB = 6$. Найдите длину отрезка LD , высоту пирамиды, опущенную из вершины B , и угол между ребром AB и плоскостью ACD .

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$3x\sqrt{x+a} + (x+a)\sqrt{x+1} = 0$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (y+z)(y^2+z^2)=13, \\ (z-x)(x^2+z^2)=40. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Олимпиада, март 2009 года

Вариант 1

1. Два комка глины, отстоящих друг от друга по горизонтали на $s = 6$ м и по вертикали на $H = 10$ м, бросают одновременно со скоростью v_1 под некоторым углом к горизонту вверх и со скоростью $v_2 = 2$ м/с вертикально вниз (рис.1). Через время $t = 1$ с комки столкнулись. Найдите v_1 .

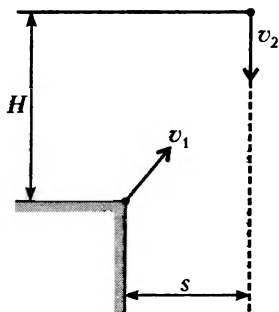


Рис. 1

2. Пустая стеклянная бутылка плавает в воде, погружившись на $3/4$ своего объема. Какой минимальный объем воды нужно налить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла $\rho_c = 2,5$ г/см³, плотность воды $\rho = 1$ г/см³, вместимость бутылки 0,7 литра.

3. Электрическая цепь состоит из параллельно соединенных резисторов сопротивлениями $R_1 = 80$ Ом и $R_2 = 40$ Ом и подключенного к ним последовательно резистора сопротивлением $R_3 = 20$ Ом. К цепи подведено напряжение. В резисторе сопротивлением R_1 выделяется мощность $P_1 = 20$ Вт. Найдите мощности, выделяющиеся в резисторах сопротивлениями R_2 и R_3 .

4. Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 3r$ (рис.2). Ключ K сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда напряжение на катушке достигает величины $2\mathcal{E}/3$.

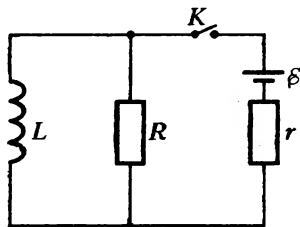


Рис. 2

1) Найдите напряжение на катушке

сразу после замыкания ключа. 2) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

5. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью 70%. Объем цилиндра изотермически уменьшили в 10 раз. Какая часть водяного пара сконденсировалась при этом? Объемом жидкости в конечном состоянии можно пренебречь.

6. В цепи, показанной на рисунке 3, конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0 , а конденсатор емкостью $2C$ – до напряжения $3U_0$. Одноименно заряженные обкладки соединены резистором сопротивлением R . Ключ K замыкают на некоторое время, а затем размыкают. 1) Найдите ток в цепи сразу после замыкания ключа. 2) Какое количество теплоты выделилось в цепи, если в момент размыкания ключа ток в цепи был в 2 раза меньше начального?

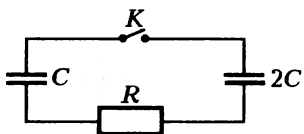


Рис. 3

7. С помощью тонкой линзы на экране получили изображение предмета, расположенного перпендикулярно оптической оси линзы. Между линзой и экраном поставили вторую линзу на расстоянии 5 см от экрана, после чего экран пришлось отодвинуть от линз на 5 см, чтобы получить на нем новое изображение. 1) Найдите фокусное расстояние второй линзы. 2) Каково отношение размеров нового и старого изображений?

Вариант 2

1. Снежки A и B , отстоящие друг от друга по горизонтали на s и по вертикали на $3s$, бросают одновременно со скоростью $v_1 = 5$ м/с под углом α таким, что $\cos \alpha = 4/5$, к горизонту вверх и со скоростью v_2 вертикально вниз (рис.4). Через некоторое время снежки столкнулись. Найдите v_2 .

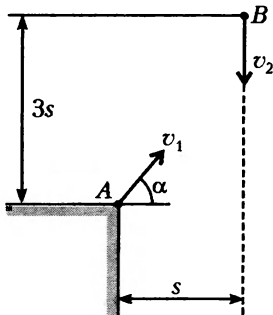


Рис. 4

2. Пустая стеклянная бутылка плавает в воде, погрузившись на $2/3$ своего объема. Найдите отношение объема воздуха в бутылке к объему стекла. Плотность стекла в 2,5 раза больше плотности воды.

3. Моль гелия совершает работу $A = 5,5$ кДж в процессе, в котором молярная теплоемкость газа постоянна и равна 18 Дж/(моль \cdot К). Во сколько раз

изменилось давление гелия, если его объем увеличился в 4 раза? Начальная температура газа $T_1 = 142 \text{ K}$.

4. В схеме, изображенной на рисунке 5, все элементы можно считать идеальными, до замыкания ключа ток в цепи отсутствовал, параметры элементов указаны на рисунке. Ключ K сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда тепловая мощность в резисторе сопротивлением R становится в 2 раза больше скорости изменения энергии катушки.

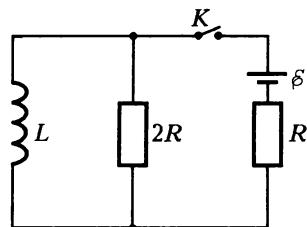


Рис. 5

1) Найдите мощность, выделяющуюся в резисторе сопротивлением R сразу после замыкания ключа. 2) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

5. Брусок совершает колебания на легкой пружине, скользя прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности. Период колебаний T , а максимальная скорость бруска v_0 . Каково удлинение пружины в момент, когда скорость бруска равна $v_0/3$?

6. В схеме, изображенной на рисунке 6, в начальный момент конденсаторы не заряжены. Параметры элементов указаны на рисунке. Сначала замыкают ключ K_1 и дожидаются установившегося режима. Затем замыкают ключ K_2 , причем ток через него сразу после этого оказывается равным ε/R и направленным слева направо. 1) Найдите ЭДС левой батареи. 2) Найдите величину заряда, протекшего через ключ K_2 после его замыкания, и укажите направление, в котором протек заряд.

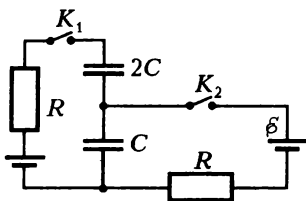


Рис. 6

7. Оптическая система состоит из расположенных друг за другом рассеивающей линзы с фокусным расстоянием -10 см и собирающей линзы с неизвестным фокусным расстоянием. Оптические оси линз совпадают. Предмет расположен перпендикулярно оптической оси перед рассеивающей линзой на расстоянии 10 см от нее. Система создает изображение предмета в натуральную величину на экране, находящемся за собирающей линзой на расстоянии 30 см от нее. 1) На каком расстоянии от себя создает изображение предмета рассеивающая линза? 2) Найдите расстояние между линзами.

Публикацию подготовили Д.Александров, Р.Константинов,
В.Чивилёв, М.Шабунин,

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Публикуемые ниже варианты 1 и 2 использовались при проведении Открытой олимпиады НГУ, проходившей в рамках дополнительного этапа Всесибирской олимпиады школьников. Вариант 3 использовался при проведении вступительных экзаменов в НГУ на факультеты: физический, информационных технологий, геолого-геофизический.

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые пять задач – расчетные, различной степени трудности: от стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Шестая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) модель этого явления, выбрать разумные числовые значения величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности.

Седьмая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выбрать главный.

Вариант 1

1. В таблице приведены плотности некоторых металлов:

Металл	золото	ртуть	серебро	медь	олово
Плотность, г/см ³	19,3	13,5	10,5	9,0	7,3

Корона весом 21,0 Н сделана целиком из одного из этих металлов. Чтобы полностью погрузить ее в ведро с ртутью, необходимо приложить сверху силу 6,0 Н. Из какого материала сделана корона?

2. Плитка, подключенная к розетке с напряжением 220 В, выделяет мощность 1 кВт. Какое сопротивление необходимо

включить последовательно с плиткой, чтобы при подключении к той же розетке мощность плитки уменьшилась до 250 Вт?

3. Футболист бьет по лежащему на земле мячу, сообщая ему скорость v_0 под углом к горизонту (рис.1). В точке, где скорость мяча становится горизонтальной, он сталкивается со скатом крыши дома, наклоненным под углом 45° к горизонту, и упруго отражается от него. Найдите максимальную высоту подъема мяча над уровнем земли. Ускорение свободного падения g . Сопротивлением воздуха пренебречь.

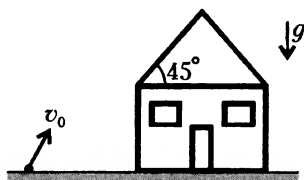


Рис. 1

4. Отверстие цилиндрического сосуда высотой H закрыто пробкой, в которую вставлена тонкая трубка, заканчивающаяся сверху воронкой (рис.2). В воронку медленно наливают воду до тех пор, пока уровень воды в трубке не доходит до воронки. При этом воздух из сосуда не выходит, а температура в сосуде поддерживается постоянной. Чему равно атмосферное давление, если уровень воды в сосуде оказался на y ниже уровня воды в воронке и на h выше дна сосуда? Плотность воды ρ , ускорение свободного падения g .

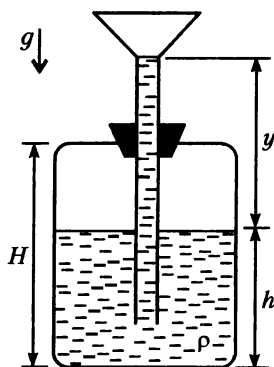


Рис. 2

5. Конденсатор емкостью C_1 , заряженный зарядом Q , катушка индуктивностью L , незаряженный конденсатор емкостью C_2 и разомкнутый ключ K соединены последовательно (рис.3). Ключ замыкают. Найдите максимальный заряд на конденсаторе емкостью C_2 .

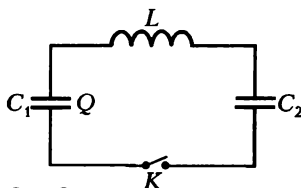


Рис. 3

6. Оцените, на сколько повысятся результаты по толканию ядра при переносе соревнований из области высоких широт на экватор Земли при прочих равных условиях проведения соревнований.

7. На горизонтальной балке закреплены две веревки. Каждая веревка обмотана одним витком вокруг горизонтально расположенного цилиндра, находящегося под балкой. Цилиндр отпускают. В зависимости от направлений обмотки цилиндр или скатывается

вается вниз, или остается на месте, удерживаемый веревками. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 2

1. Утенок Дональд придумал гениальный способ поднять затонувший корабль: наполнить его теннисными шариками. Вес корабля в воде 30000 Н. Считая шарики абсолютно герметичными и несжимаемыми, определите, сколько шариков потребуется Дональду, если объем шарика 31 см^3 , его масса 1 г, плотность воды 1 г/см^3 , ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

2. Схема электрической цепи, состоящей из батареи с нулевым внутренним сопротивлением, конденсатора, разомкнутого

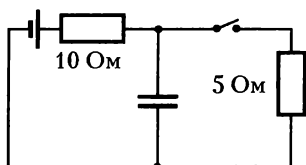


Рис. 4

ключа и двух сопротивлений 10 Ом и 5 Ом, показана на рисунке 4. Во сколько раз изменится заряд на конденсаторе, если замкнуть ключ и подождать длительное время?

3. Бомбардировщик летит по окружности радиусом R с постоянной по модулю скоростью v , все время оставаясь на высоте h над землей и непрерывно выпуская бомбы. Найдите радиус окружности на земле, на которую будут ложиться

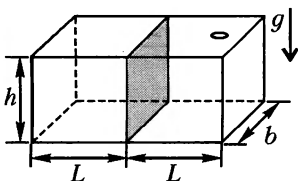


Рис. 5

эти бомбы. Влиянием воздуха на полет бомб пренебречь.

4. Замкнутый сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда длиной $2L$, шириной b и высотой h перекрыт посередине тонким поршнем, который может перемещаться без трения (рис.5). В правую половину сосуда через отверстие сверху медленно наливают жидкость плотностью ρ . Какой объем жидкости можно налить, если атмосферное давление p_0 , ускорение свободного падения g , а температура постоянна?

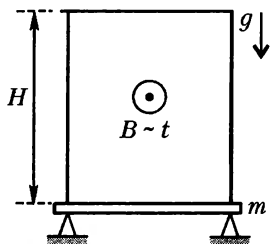


Рис. 6

5. П-образная вертикальная рамка высотой H сделана из проволоки с конечным сопротивлением и закреплена основанием (рис.6). Внизу рамка замыкается проводящей горизонтальной однородной перемычкой массой m , которая постоит на непроводящих подставках и может без трения подниматься по рамке. В начальный момент вре-

мени включают горизонтальное однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, индукция которого возрастает пропорционально времени. Какое суммарное количество теплоты Q выделится в рамке и переключке к моменту, когда переключка начнет подниматься по рамке? Ускорение свободного падения g . Индукцией от тока по рамке и переключке пренебречь.

6. Оцените, на сколько различается вес ведра с водой, измеряемый пружинными весами на 1-м и на 9-м этаже дома.

7. Два одинаковых шприца с выдвинутыми поршнями – один сухой, а второй с капелькой холодной воды внутри – погружают в кипяток так, что капелька воды не перекрывает отверстие во втором шприце. Спустя примерно минуту оба шприца одновременно переносят из кипятка в холодную воду (иглами вниз). Через некоторое время шприцы вытаскивают и обнаруживают воду внутри обоих шприцов, причем во втором шприце ее существенно больше, чем в первом. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. Брошенный камень упал на землю через время $t = 3$ с на расстоянии $L = 60$ м от точки броска. Найдите начальную скорость камня. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На рисунке 7 изображена собирающая линза с фокусным расстоянием F . Постройте изображение предмета в виде стрелки в случае расстояния

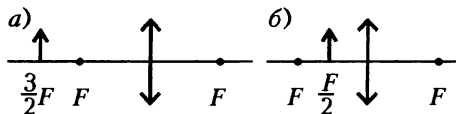


Рис. 7

от предмета до линзы: а) $\frac{3}{2}F$; б) $\frac{1}{2}F$. Найдите коэффициент линейного увеличения в обоих случаях.

3. Поршень массой M , перекрывающий стакан сечением S , находится на расстоянии l от дна стакана (рис.8). Когда стакан перевернули, поршень остановился на расстоянии L от дна. Определите внешнее давление воздуха, если в начальном и конечном состояниях температура газа в стакане одна и та

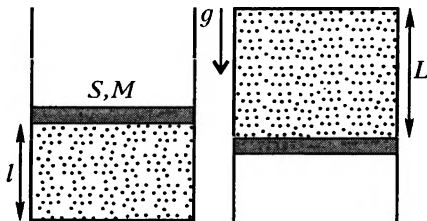


Рис. 8

же, а стенки стакана вертикальны. Ускорение свободного падения g .

4. Тело массой m в начальный момент времени имеет скорость v , направленную под углом α к горизонту. Магнитное поле B направлено вдоль ускорения свободного падения g . Каким электрическим зарядом q должно обладать тело, чтобы оно вернулось в начальную точку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Длинный грузовик массой M перевозит в кузове незакрепленный ящик массой m , двигаясь по горизонтальной дороге со скоростью v (рис.9). Водитель замечает препятствие и резко тормозит, блокируя все колеса.

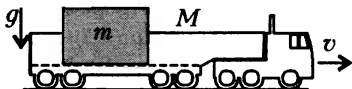


Рис. 9

Сместится ли при этом груз относительно кузова? Если да, то

на какое расстояние? Коэффициент трения между ящиком и кузовом μ , между колесами грузовика и дорогой 2μ . Креном грузовика при торможении пренебречь.

6. Сколько квантов видимого света испускает за одну секунду настольная лампа накаливания?

7. Стекланный сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда помещен перед двумя экранами (рис.10). Свет лазерной

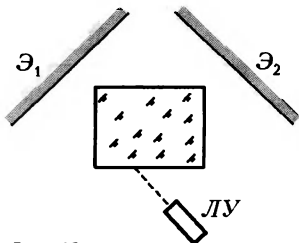


Рис. 10

указки (ЛУ) направлен параллельно основанию сосуда под углом к боковой грани. При этом на экране \mathcal{E}_1 наблюдается яркое световое пятно, а на экране \mathcal{E}_2 – менее яркое пятно. После того как в сосуд налили воду, пятно на экране \mathcal{E}_1 исчезло, но появилось на экране \mathcal{E}_2 вместо менее яркого. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили А.Ненашев, А.Погосов

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Вступительный экзамен проводился для тех абитуриентов, которые имели право не сдавать единый государственный экзамен: для выпускников техникумов, выпускников школ прежних лет, иностранцев и освобожденных от ЕГЭ по состоянию здоровья. Экзамен был письменный и оценивался по 100-балльной шкале.

Вариант 1

Часть 1

Ответы к задачам В1–В12 внесите в бланк ответов, решения запишите отдельно от части 2. Правильный ответ без решения оценивается в 2 балла, максимальная оценка за задачу с решением 5 баллов.

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ.

В1. Самолет пролетел по прямой 320 км, затем повернул под прямым углом и пролетел еще 240 км. Чему равен (в км) модуль вектора перемещения самолета?

В2. Чему равен вес стоящего в лифте человека массой 70 кг, если лифт поднимается с ускорением, направленным вверх и равным 3 м/с^2 ? Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

В3. На какой высоте (в км) над поверхностью Земли ускорение свободного падения в 4 раза меньше, чем на земной поверхности? Радиус Земли 6400 км.

В4. Пуля массой 20 г пробила стенку, при этом скорость ее уменьшилась от 800 м/с до 600 м/с. Найдите изменение импульса пули. В ответе укажите модуль полученной величины.

В5. Пуля массой 4 г, летевшая горизонтально со скоростью 800 м/с, пробивает доску и вылетает из нее со скоростью 400 м/с. Найдите абсолютную величину работы, совершенной над пулей силой сопротивления со стороны доски.

В6. В одинаковых баллонах при одной и той же температуре находятся равные массы азота и гелия. Во сколько раз давление, производимое азотом на стенки баллона, будет меньше, чем давление гелия, если молярная масса азота 28 кг/кмоль , а гелия 4 кг/кмоль ?

В7. При трении двух одинаковых тел температура их через одну минуту повысилась на 10°C . Какова средняя мощность, развиваемая в обоих телах при их трении? Теплоемкость каждого тела 240 Дж/К . Теплотери не учитывать.

В8. Шарик массой $4,5 \text{ г}$ и зарядом $0,2 \text{ мКл}$ помещен в масло плотностью 800 кг/м^3 . Плотность материала шарика 1500 кг/м^3 . Определите напряженность электрического поля, в которое следует поместить шарик, чтобы он находился в равновесии. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

В9. По проводнику сопротивлением 6 Ом пропускали постоянный ток в течение 7 с . Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время, если через его сечение прошел заряд, равный 7 Кл ?

В10. Определите работу (в мДж), совершаемую силой Ампера при перемещении проводника длиной $0,2 \text{ м}$ с током 1 А в однородном магнитном поле на расстояние $0,5 \text{ м}$. Проводник расположен перпендикулярно линиям поля и движется в направлении силы Ампера. Индукция магнитного поля $0,2 \text{ Тл}$.

В11. Под каким наименьшим углом (в градусах) должны падать лучи света на границу стекло–воздух, чтобы наблюдалось явление полного внутреннего отражения? Показатель преломления стекла равен 2 .

В12. В реакции изотопа алюминия ${}^{27}_{13}\text{Al}$ и углерода ${}^{12}_6\text{C}$ образуются α -частица и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в образующемся ядре.

Часть 2

Для задач С1–С4 запишите подробные решения. Максимальная оценка за каждую задачу 10 баллов.

С1. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар большей массы до удара покоился. В результате центрального удара скорость налетающего шара уменьшилась в пять раз. Чему равна его масса, если масса второго шара 6 кг ?

С2. Идеальный одноатомный газ совершает замкнутый цикл, состоящий из изохорного нагревания, в котором давление увеличивается в 4 раза, изобарного нагревания, в котором объем увеличивается на 30% , и возвращения в исходное состояние в

процессе, где давление линейно зависит от объема. Найдите КПД (в процентах) цикла.

С3. Перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле влетают протон и однозарядный ион атома гелия, ускоренные одной и той же разностью потенциалов. Во сколько раз радиус окружности, по которой движется ион, больше, чем для протона?

С4. Шарик массой 0,2 кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания. Во сколько раз увеличится частота колебаний, если шарiku сообщить заряд 100 мкКл и поместить в однородное электрическое поле напряженностью 160 кВ/м, направленное вертикально вниз? Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

Вариант 2

Часть 1

Ответы к задачам В1–В12 внесите в бланк ответов, решения запишите отдельно от части 2. Правильный ответ без решения оценивается в 2 балла, максимальная оценка за задачу с решением 5 баллов.

Внимание! Если единицы не указаны, выразите ответ в единицах СИ.

В1. Тело переместилось из точки с координатами (–1 м; 5 м) в точку с координатами (3 м; 2 м). Найдите модуль перемещения тела.

В2. Прочность троса на разрыв составляет 1400 Н. Какой максимальной массы груз можно поднимать этим тросом с ускорением 10 м/с^2 ? Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

В3. На сколько процентов уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное трем радиусам шаров?

В4. Два тела, двигаясь навстречу друг другу со скоростью 7 м/с каждое, после соударения стали двигаться вместе со скоростью 3,5 м/с. Найдите отношение большей массы к меньшей.

В5. Вагон массой 2 т, двигаясь со скоростью 1 м/с, наезжает на вертикальную стенку, в результате чего сжимаются две буферные пружины жесткостью 100 кН/м каждая. Найдите максимальную деформацию пружин (в см).

В6. Баллон емкостью 16,6 л содержит 550 г углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $4 \cdot 10^6$ Па. При какой

температуре (в Кельвинах) баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль , универсальная газовая постоянная $8300 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

В7. На электроплитке мощностью 1200 Вт нагревается до кипения $2,4 \text{ кг}$ воды за 20 минут. Начальная температура воды 20°C , удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$. Определите КПД (в процентах) установки.

В8. Маленький шарик, подвешенный на шелковой нити, имеет заряд 49 нКл . В горизонтальном электрическом поле с напряженностью 200 кВ/м нить отклонилась от вертикали на угол, тангенс которого равен $0,125$. Найдите массу шарика (в г). Ускорение свободного падения $9,8 \text{ м/с}^2$.

В9. Две одинаковые электролампы включены в сеть постоянного напряжения 20 В : один раз последовательно, второй раз параллельно. Во втором случае потребляемая лампами мощность на 6 Вт больше, чем в первом. Найдите сопротивление каждой лампы.

В10. Во сколько раз электрическая сила, действующая на электрон, больше магнитной силы, если напряженность электрического поля $3,5 \text{ кВ/м}$, а индукция магнитного поля $0,1 \text{ Тл}$? Скорость электрона равна 200 м/с и направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

В11. Предмет находится на расстоянии 16 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 15 см . Найдите расстояние от изображения до линзы (в см).

В12. Определите длину волны света (в нм), которым освещается поверхность металла, если фотоэлектроны имеют максимальную кинетическую энергию $4 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, а работа выхода электронов из этого металла $4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Постоянная Планка $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, скорость света $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Часть 2

Для задач С1–С4 запишите подробные решения. Максимальная оценка за каждую задачу 10 баллов.

С1. На конце легкой нити длиной 80 см укреплен шарик. Нить с шариком вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через другой конец нити. В верхней точке траектории шарик имеет скорость 4 м/с . Во сколько раз натяжение нити в нижней точке больше, чем в верхней? Ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

С2. Идеальный одноатомный газ совершает замкнутый цикл, состоящий из изохорного нагревания, в котором давление увеличи-

чивается в 7 раз, изобарного нагревания, в котором объем увеличивается в 2,2 раза, и возвращения в исходное состояние в процессе, где давление линейно зависит от объема. Найдите КПД (в процентах) цикла.

С3. Протон в магнитном поле с индукцией 0,01 Тл движется по дуге окружности радиусом 20 см. После вылета из магнитного поля он полностью тормозится электрическим полем. Чему равна тормозящая разность потенциалов, если отношение заряда протона к его массе равно 10^8 Кл/кг?

С4. Найдите период вертикальных гармонических колебаний (в мс) бутылки, плавающей на поверхности воды в вертикальном положении дном вниз, если ее масса 300 г, а площадь дна 30 см^2 . Плотность воды 1000 кг/м^3 , ускорение свободного падения 10 м/с^2 , число $\pi = 3,14$.

Публикацию подготовил А.Черноуцан

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{a+1-2\sqrt{a}}{a-1} + \frac{2}{\sqrt{a}+1}$.

2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 15, 21 и 35.

3. Найдите произведение корней уравнения $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

4. Решите уравнение $\sqrt{6-x} = x$.

5. Решите неравенство $|2x^2 - 4x + 1| < 1$.

6. Найдите рациональное число – значение выражения $\arcsin(\cos(7\pi/4))/\pi$.

7. Решите уравнение $\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$.

8. Найдите все рациональные корни уравнения $\arccos x - \arcsin x = 5\pi/6$.

9. Найдите целое число – значение выражения $5^{\log_3 a}$, если $a = 2^{\log_5 3}$.

10. Решите уравнение $9^{x+2} - 24 \cdot 3^x = 1$.

11. Решите неравенство $\lg(x-1) \leq \lg(3-x)$.

12. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, которые делятся на число 11.

13. Найдите отношение суммы первых 5 элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$ к сумме всех ее элементов.

14. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/2}(x-1)}$.

15. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin x (2 \cos 2x + 1)$.

16. Найдите множество значений функции $y = 2x/(x^2 + 1)$.

17. Найдите наименьшее из расстояний между точками parabолы $y = (x^2 + 1)/2$ и прямой $y = x - 1$.

18. Найдите площадь трапеции с высотой 6, если ее диагонали имеют длины 10 и $15/2$.

19. Найдите объем конуса, вписанного в шар с радиусом 5, если радиус основания конуса равен 4.

20. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax^2 + y = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{a^2 - 6a + 8}{a - 4} + 2$.

2. Найдите количество натуральных двузначных чисел, которые делятся одновременно на 3 и на 7.

3. Найдите целое число – значение выражения $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2}$.

4. Решите уравнение $\frac{4}{x - 2} = x + 1$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + x + 1} \geq |x|$.

6. Найдите целое число – значение производной функции $y = \operatorname{tg} 3x$ в точке $\pi/18$.

7. Найдите такие значения $\operatorname{tg}(x/2)$, для которых $\sin x = 3/5$.

8. Решите уравнение $\sin 3x \cos x = \cos 3x \sin x$.

9. Найдите рациональное число – значение выражения $\operatorname{tg}(\arcsin(3/5))$.

10. Найдите рациональное число – значение выражения $\log_8 5 \log_{25} 2$.

11. Решите уравнение $3^{x-4} = 9^x$.

12. Решите неравенство $\lg(-x^2 + 4x - 3) \geq \lg(x - 1)$.

13. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y = x^2 - 4x + 5$ относительно прямой $x = 1$.

14. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x-1)/(2-x)}.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = -1/2, \\ \sin x - \cos y = 3/2. \end{cases}$$

16. Отношение суммы S_{3n} первых $3n$ элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме S всех ее элементов равно $19/27$. Найдите S_n/S .

17. Найдите значение a , при котором прямая $y = 2x$ является касательной к параболе $y = x^2 + a$.

18. Хорда длины 50 находится на расстоянии 12 от центра круга и делится точкой P в отношении $2 : 3$. Найдите расстояние от центра круга до точки P .

19. Найдите площадь боковой грани правильной треугольной призмы, если ее объем равен 1, а высота треугольника, лежащего в основании призмы, равна 2.

20. При каких значениях a уравнения $\operatorname{tg}^2 x / (1 + \operatorname{tg}^2 x) = a$ и $\sin^2 x = a$ не равносильны?

ФИЗИКА

Региональная олимпиада школьников Санкт-Петербурга для профессионально-ориентированной молодежи

Вариант 1

(отборочный тур)

1. Материальная точка не имеет...

А) размеров; Б) координат; В) массы; Г) импульса; Д) кинетической энергии.

2. Точка движется с постоянным ускорением по прямой. На рисунке 1 представлены скорости точки в два последовательных момента времени. Как направлен вектор ускорения точки?



Рис. 1

А) В ту же сторону, что и вектор скорости v_1 ; Б) в ту же сторону, что и вектор скорости v_2 ; В) ускорение равно нулю; Г) по данной картинке нельзя судить о направлении вектора ускорения.

3. В широкую U-образную трубку с вертикальными прямыми коленами одинакового сечения налиты равные объемы жидко-

стей: в правое колено — вода, в левое — бензин ($\rho = 720 \text{ кг/м}^3$). Если отсчитывать уровень жидкости от дна трубки, то...

А) высота жидкости в правом колене больше, чем в левом;
Б) высота жидкости в левом колене больше, чем в правом;
В) высоты жидкостей одинаковы; Г) по приведенным данным нельзя судить об уровнях этих жидкостей.

4. Два маленьких шара находятся на некотором расстоянии друг от друга. Как изменится сила гравитационного притяжения между ними, если увеличить массу каждого шара вдвое?

А) Уменьшится в 2 раза; Б) уменьшится в 4 раза; В) не изменится; Г) увеличится в 2 раза; Д) увеличится в 4 раза; Е) среди приведенных ответов правильного ответа нет.

5. Камень брошен вертикально вверх с поверхности земли со скоростью v_0 . На какой высоте h от земли кинетическая энергия камня равна его потенциальной энергии, если за начало отсчета принять поверхность земли? Сопротивление воздуха не учитывать.

А) $h = \frac{4v_0^2}{g}$; Б) $h = \frac{2v_0^2}{g}$; В) $h = \frac{v_0^2}{g}$; Г) $h = \frac{v_0^2}{4g}$;
Д) $h = \frac{v_0^2}{2g}$; Е) среди приведенных ответов правильного ответа нет.

6. Идеальный газ находится в сосуде. Если две трети газа из сосуда выпустить, а температуру увеличить в 3 раза, то давление в сосуде...

А) уменьшится в 3 раза; Б) уменьшится в 9 раз; В) не изменится; Г) увеличится в 3 раза; Д) увеличится в 9 раз; Е) среди приведенных ответов правильного ответа нет.

7. Два конденсатора подключены параллельно к источнику напряжения. Заряд на обкладках первого конденсатора в 10 раз меньше, чем у второго. Емкости конденсаторов...

А) $C_1 = 0,01C_2$; Б) $C_1 = 100C_2$; В) $C_1 = C_2$; Г) $C_1 = 0,1C_2$;
Д) $C_1 = 10C_2$.

8. Два резистора изготовлены из проволоки одинакового материала, но длина проволоки у первого резистора в 3 раза меньше, чем у второго, а площадь ее поперечного сечения у первого резистора в 2 раза больше, чем у второго. Сопротивление первого резистора R_1 равно...

А) $6R_2$; Б) $\frac{1}{6}R_2$; В) $\frac{3}{2}R_2$; Г) $\frac{2}{3}R_2$.

9. Электрон движется в однородном магнитном поле равномерно и прямолинейно. Угол между вектором его скорости и вектором магнитной индукции равен...

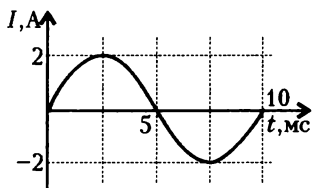


Рис. 2

- А) 0° ; Б) 60° ; В) 45° ; Г) 30° ;
Д) 90° .

10. В колебательном контуре сила тока изменяется согласно графику на рисунке 2. Заряд конденсатора возрастает в интервале времени...

- А) от 0 до 2,5 мс, от 5 мс до 7,5 мс; Б) от 0 до 5 мс; В) от 5 мс до 10 мс; Г) от 2,5 мс до 7,5 мс;
Д) от 2,5 мс до 5 мс, от 7,5 мс до 10 мс.

11. Поезд прошел путь 200 км. В течение первого часа он двигался со скоростью 100 км/ч, затем сделал остановку на 30 мин. Оставшуюся часть пути он шел со скоростью 40 км/ч. Какова средняя скорость поезда?

12. Определите радиус горбатого мостика, имеющего вид дуги окружности, при условии, что вес автомобиля, двигающегося с постоянной скоростью 90 км/ч, в верхней части мостика уменьшился вдвое.

13. Молот массой 1 т падает с высоты 1,8 м. Длительность удара 0,1 с. Определите среднее значение силы удара, считая удар абсолютно упругим.

14. Однородная балка массой 10 кг опирается на трехгранную призму на расстоянии $1/6$ ее длины (рис.3). Какую силу, перпендикулярную к балке, надо приложить к ее короткому концу, чтобы удержать балку в горизонтальном положении?

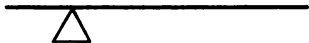


Рис. 3

15. Период колебаний груза на пружине 0,4 с. На сколько уменьшится длина пружины, если снять с нее груз?

16. Газ изотермически сжали от объема 8 л до объема 6 л. Давление при этом возросло на 4 кПа. Определите первоначальное давление газа.

17. Относительная влажность в комнате при температуре 16°C составляет 63 %. Какой она станет при понижении температуры воздуха до 12°C , если парциальное давление водяного пара останется прежним? Давление насыщенного водяного пара при 12°C составляет 1,4 кПа, а при 16°C оно равно 1,8 кПа.

18. В вершинах квадрата со стороной a находятся четыре одинаковых по модулю заряда q , по одному в каждой вершине. Заряды расположены таким образом, что на концах диагоналей лежат заряды противоположных знаков. Определите напряженность электрического поля в центре квадрата.

19. Резистор сопротивлением 4 Ом подключен к источнику тока с внутренним сопротивлением 1 Ом. Резистор какого сопротивления необходимо соединить последовательно с первым резистором, чтобы мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении источника, уменьшилась в 9 раз?

20. Горизонтальный проводник находится в равновесии в горизонтальном магнитном поле с индукцией 40 мТл. Сила тока в проводнике 23 А. Угол между направлением тока и вектором магнитной индукции 45° . Определите длину проводника, если его масса 23 г.

Вариант 2

(заключительный тур)

1. Монокристаллический кремний, необходимый для изготовления интегральных микросхем, получают вытягиванием цилиндрического стержня из расплава со скоростью 1,2 метра в сутки. Стержень затем разрезается поперек на круглые пластины толщиной 500 мкм, на которых потом и формируются элементы микросхемы. Длина стержня увеличивается на толщину одной пластины за время, равное...

А) 7 нс; Б) 36 мс; В) 1,5 с; Г) 36 с; Д) 10 ч.

2. Материальная точка при равномерном движении по окружности за время t прошла $1/4$ часть окружности с центростремительным ускорением $a_{\text{ц}}$. Определите радиус окружности.

А) $a_{\text{ц}} t^2$; Б) $\frac{a_{\text{ц}} t^2}{\pi}$; В) $\frac{2a_{\text{ц}} t^2}{\pi}$; Г) $\pi a_{\text{ц}} t$; Д) $\frac{4a_{\text{ц}} t^2}{\pi^2}$; Е) среди перечисленных ответов нет правильного.

3. Канат разрывается при нагрузке 1920 Н. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой 120 кг на этом канате?

А) $1,6 \text{ м/с}^2$; Б) $6,0 \text{ м/с}^2$; В) 10 м/с^2 ; Г) 16 м/с^2 ; Д) 26 м/с^2 .

4. Какова должна быть площадь льдины толщиной 10 см, чтобы она смогла удержать над водой рыболова массой 100 кг?

А) 1 м^2 ; Б) 5 м^2 ; В) 10 м^2 ; Г) 15 м^2 ; Д) такой толщины льдина нагрузки не выдержит.

5. Шайба массой 50 г, скользя по наклонной плоскости, поднимается на высоту 2 м. Сила тяжести при этом совершает работу...

А) 1 кДж; Б) 1 Дж; В) 0; Г) -1 Дж ; Д) -1 кДж .

6. В процессе 1–2–3 (рис.4), проведенном с неизменной массой идеального газа, температура газа меняется следующим

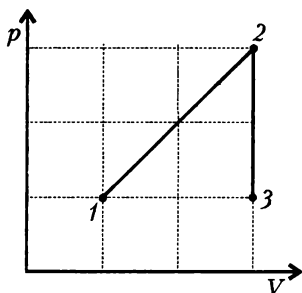


Рис. 4

образом...

А) на 1–2 растет, на 2–3 уменьшается; Б) на 1–2 растет, на 2–3 не меняется; В) на 1–2 не меняется, на 2–3 уменьшается; Г) на 1–2 растет, на 2–3 растет; Д) на 1–2 не меняется, на 2–3 растет.

7. Внутренняя энергия идеального газа увеличилась на 300 Дж, и внешние силы совершили над ним работу 100 Дж. Переданное газу количество теплоты равно...

А) 0; Б) 100 Дж; В) 200 Дж; Г) 300 Дж; Д) 400 Дж.

8. На расстояниях $3a$ и $2a$ от заряда $q_1 = q$ расположены заряды $q_2 = 2q$ и $q_3 = -3q$ соответственно. Отношение модулей сил взаимодействия первого заряда со вторым и третьим F_{12}/F_{13} равно...

А) $3/2$; Б) $2/3$; В) $4/9$; Г) $9/4$; Д) $8/27$.

9. Как направлена сила, действующая на отрицательный ион, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} (рис.5)?

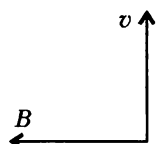


Рис. 5

А) Налево; Б) направо; В) против направления \vec{v} ; Г) по направлению \vec{v} ; Д) перпендикулярно плоскости рисунка, к нам; Е) перпендикулярно плоскости рисунка, от нас.

10. Расстояние от стены до свечи 2 м. Когда между ними поместили собирающую линзу на расстоянии 40 см от свечи, то на стене получилось четкое изображение пламени. Фокусное расстояние этой линзы равно...

А) 3 см; Б) 32 см; В) 5 см; Г) 53 см; Д) 80 см; Е) 160 см.

11. Тело, двигавшееся прямолинейно и равноускоренно, прошло за первую секунду 1 м, за вторую секунду 2 м. Какова его начальная скорость?

12. Лестница массой m и длиной l прислонена к гладкой вертикальной стене под углом α к вертикали. Центр тяжести лестницы, не совпадающий с ее геометрическим центром, находится на высоте h от пола. Человек тянет лестницу за середину в горизонтальном направлении с силой F . При каком минимальном значении силы F_{\min} человек сможет оторвать верхний конец лестницы от стены? Трение о пол настолько велико, что нижний конец лестницы не скользит.

13. Мальчик массой 60 кг, бегущий со скоростью 7 м/с, догоняет тележку массой 30 кг, движущуюся со скоростью 2 м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка после этого?

14. Математический маятник длиной 1 м отводят от положения равновесия и отпускают. Сколько раз за время 7 с кинетическая энергия маятника достигнет максимального значения?

15. В сосуде под поршнем находится газ массой 19,3 г под давлением 10^5 Па. В результате изобарического расширения его объем увеличился на 10 л, а температура поднялась на 100 К. Найдите химическую формулу газа, если известно, что он является соединением углерода и водорода.

16. Какую массу воды, находящейся при температуре 25 °С, можно испарить, затратив энергию 523 Дж?

17. Конденсатор образован двумя квадратными пластинами, отстоящими друг от друга в вакууме на 0,88 мм. Чему должна быть равна сторона квадрата, чтобы емкость конденсатора составляла 1 пФ?

18. В схеме, показанной на рисунке 6, сопротивления резисторов равны $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Ток через резистор сопротивлением R_3 равен $I_3 = 1$ А. Найдите мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением R_1 .

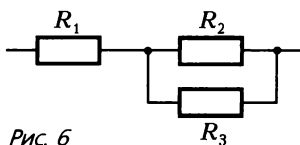


Рис. 6

19. Перемычка массой m и сопротивлением R соскальзывает по гладким короткозамкнутым рельсам, расположенным под углом α к горизонту. Расстояние между рельсами l . Система находится в однородном магнитном поле B , перпендикулярном плоскости рельсов. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Индуктивностью и сопротивлением рельсов пренебречь.

20. Луч света падает из воздуха на поверхность воды. Длина волны света в воде в n раз меньше, чем в воздухе. Найдите угол между преломленным и отраженным лучами, если угол падения равен α .

*Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов,
А.Моисеев, С.Преображенский, В.Родионов*

ЕГЭ–2010 ПО ФИЗИКЕ

Вариант 1

Ответы к задачам части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
1	1	3	2	3	4	1	4	4	3	4	3	2	3	3	1
A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25							
4	4	2	3	2	1	4	2	4							

Ответы к задачам части 2

B1	B2	B3	B4	B5
123	21	2	0	0,5

Указания и решения к избранным вопросам и задачам

A1. Удобно использовать не формулы кинематики равноускоренного движения, а графический смысл перемещения как площади под графиком скорости. В данной задаче путь равен перемещению, так как проекция скорости всюду неотрицательна.

A4. Надо использовать формулу $\Delta p_x = F_x \Delta t$.

A7. Из второго закона Ньютона для всей системы следует, что ускорение не меняется. Далее надо рассмотреть тело 2, которое ускоряется только силой натяжения нити.

A11. Работа газа равна площади под графиком зависимости $p(V)$.

A19. Ток в цепи остается неизменным.

B2. Сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ уменьшается. Напряжение $U = IR = \mathcal{E} - Ir$ увеличивается.

B3. Из формулы зависимости скорости от времени $3v_0 = v_0 + at$ выражаем начальную скорость: $v_0 = \frac{at}{2}$ и подставляем в формулу $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

В4. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда до 0°C , $Q_1 = c_{\text{л}} m_{\text{л}} \Delta t = 2,1 \cdot 10^2$ Дж, меньше количества теплоты, которое надо забрать у воды для ее замерзания, $Q_2 = \lambda m_{\text{в}} = 3,3 \cdot 10^4$ Дж. Значит, лед нагреется до 0°C , и только часть воды замерзнет.

В5. В формулу для главных максимумов дифракционной решетки $d \sin \alpha = k \lambda$ подставляем порядок спектра $k = 2$, период решетки $d = \frac{L}{N} = \frac{0,01\text{ м}}{750}$ и $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\Delta x/2}{l} = \frac{22,5 \text{ см}/2}{150 \text{ см}}$.

С1. Пар все время находится в равновесии с жидкостью, т.е. является насыщенным. Плотность насыщенного пара зависит только от температуры. Так как температура не меняется, плотность пара остается постоянной. При уменьшении объема пара его масса уменьшается, следовательно, масса жидкости увеличивается.

С2. Система доска – шайба замкнутая, поэтому конечную скорость доски можно найти из закона сохранения импульса

$$mv_0 = (m + M)v.$$

Ускорение доски определяется единственной действующей на нее горизонтальной силой – силой трения со стороны шайбы, направленной вперед:

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

Остается найти время скольжения:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{Mv_0}{\mu g(m + M)} = 0,8 \text{ с}.$$

С3. В изохорном процессе $A_{12} = 0$, а в изотермическом процессе $\Delta U_{23} = 0$. Поэтому

$$A_{123} = A_{23} = Q_{23},$$

$$Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2} \nu R (3T_0 - T_0) + Q_{23}.$$

Получаем

$$\frac{A_{123}}{Q_{123}} = \frac{Q_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} = 0,5.$$

С4. Напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе сопротивлением R_2 (через резистор сопротивлением R_1 ток не течет):

$$U_C = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2} R_2.$$

Из формулы $U_C = Ed$ получаем

$$d = \frac{U_C}{E} = \frac{ER_2}{(r + R_2)} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм} .$$

С5. По правилу левой руки на стороны AD и AC действуют силы Ампера \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направленные вертикально вверх, приложенные к серединам этих сторон и равные по величине

$$F_1 = F_2 = IBa \sin 30^\circ = 0,5IBa ,$$

а на сторону CD действует сила Ампера

$$F_3 = IBa ,$$

направленная вертикально вниз. Рамка будет приподниматься, поворачиваясь вокруг стороны CD , если суммарный момент сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно оси CD будет больше момента силы тяжести относительно этой оси:

$$2 \cdot 0,5IBa \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \geq mg \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} ,$$

откуда находим

$$B \geq \frac{2mg}{3Ia} .$$

С6. Запишем уравнение Эйнштейна для каждой длины волны:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + \frac{m(2v_2)^2}{2} ,$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + \frac{mv_2^2}{2}$$

и выразим отсюда работу выхода:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{3} \left(\frac{4}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \approx 3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} .$$

Вариант 2

Ответы к задачам части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
3	1	1	2	4	2	4	3	2	3	2	3	4	3	1	4
A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25							
1	4	3	2	2	3	4	1	1							

Ответы к задачам части 2

B1	B2	B3	B4	B5
131	31	15	300	1,6

Указания и решения к избранным вопросам и задачам

A7. На тело действует сила трения покоя, для ее вычисления надо записать второй закон Ньютона: $F - F_{\text{тр}} = 0$.

A25. Период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Жесткость жгута k для малых колебаний данного груза определяется наклоном кривой в точке равновесия (рис. 1). Жесткость для груза массой $4m$ (точка B) меньше, чем для груза массой m (точка A).

B1. Из второго закона Ньютона для движения заряженной частицы по окружности в магнитном поле

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

получаем выражения для радиуса и периода:

$$R = \frac{mv}{qB}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

(R возрастает, T не меняется). Кинетическая энергия при увеличении скорости, конечно, возрастает, но с движением в магнитном поле это никак не связано.

B3. Надо записать правило моментов относительно правого конца стержня:

$$NL \cos \alpha - mg(L - l) \sin \alpha = 0$$

и выразить отсюда N .

B5. Из таблицы находим период колебаний: $T = 8 \cdot 10^{-6}$ с и максимальный заряд конденсатора: $q_{\text{max}} = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл. Затем по формуле

$$I_{\text{max}} = \omega q_{\text{max}} = \frac{2\pi}{T} q_{\text{max}}$$

вычисляем максимальный ток.

C1. Схема цепи изображена на рисунке 2. Сила тока $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ увеличивается. Напряжение $U = IR = \mathcal{E} - Ir$ уменьшается.

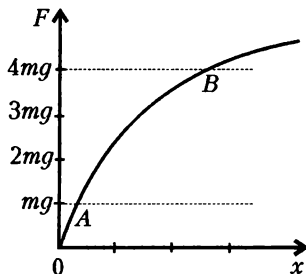


Рис. 1

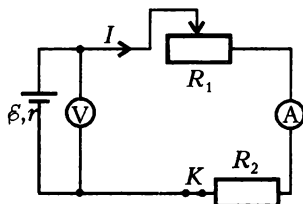


Рис. 2

С2. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

найдем высоту подъема снаряда:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Применив к движению первого осколка закон сохранения энергии

$$m_1gh + \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1(2v_0)^2}{2},$$

найдем его скорость v_1 после разрыва:

$$v_1 = \sqrt{4v_0^2 - 2gh} = \sqrt{4v_0^2 - v_0^2} = \sqrt{3}v_0.$$

Скорость второго осколка после разрыва найдем из уравнения

$$0 = h + v_2t - \frac{gt}{2},$$

выражающего условие, что в момент падения координата осколка обращается в ноль (ось координат направлена от поверхности земли вертикально вверх). Получаем

$$v_2 = \frac{gt}{2} - \frac{h}{t} = \frac{gt}{2} - \frac{v_0^2}{2gt}.$$

Чтобы найти отношение масс осколков, запишем закон сохранения импульса при разрыве снаряда:

$$0 = m_1v_1 - m_2v_2$$

(скорость снаряда в верхней точке равна нулю). Получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{gt}{2\sqrt{3}v_0} - \frac{v_0}{2\sqrt{3}gt} \approx 0,43.$$

С3. Количество теплоты в изобарном процессе 1–2 вычислим с помощью первого закона термодинамики:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Температуру T_2 найдем из уравнения изохорного процесса 2–3:

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} = 3, \quad T_2 = 3T_3 = T_1.$$

Подставляя в формулу для количества теплоты, получаем

$$Q_{12} = 5\nu RT_1 \approx 12,5 \text{ кДж}.$$

С4. Мощность, передаваемая от источника во внешнюю цепь (выделяемая на реостате), равна разности между полной мощностью сторонних сил и тепловой мощностью, потерянной на внутреннем сопротивлении источника:

$$P = \mathcal{E}I - I^2 r .$$

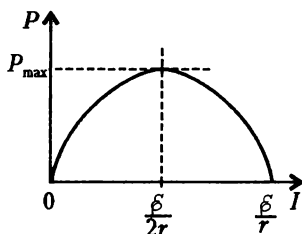


Рис 3

График зависимости $P(I)$ имеет вид параболы (рис.3), пересекающей ось абсцисс в точках $I = 0$ и $I = \mathcal{E}/r$. Вершина параболы (максимум $P(I)$) соответствует току $I = \mathcal{E}/(2r)$, максимальное значение мощности равно

$$P_{\max} = \mathcal{E}I_1 - I_1^2 r = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 4,5 \text{ Вт} .$$

С5. Исходя из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и формулы увеличения линзы

$$\Gamma = \frac{f}{d} ,$$

получим формулу, выражающую f через F и Γ :

$$f = (1 + \Gamma) F .$$

По условию $\Gamma_1 = 5$, $\Gamma_2 = 3$. Получаем

$$f_1 = 6F, \quad f_2 = 4F .$$

По условию $f_1 - f_2 = l = 30$ см. Получаем $2F = l$, т.е.

$$F = \frac{l}{2} = 15 \text{ см} .$$

С6. За время $t = 3600$ с препарат испускает $N = At$ α -частиц (A – активность препарата), энергия которых превращается во внутреннюю тепловую энергию контейнера:

$$c_m m \Delta T = E_\alpha At .$$

Здесь c_m – удельная теплоемкость меди, E_α – энергия α -частиц. Отсюда находим

$$\Delta T \approx 2,7 \text{ К} .$$

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 5.

Пусть a , n и f – число шахматистов в командах англичан, немцев и французов соответственно, а k – искомое число. Тогда, подсчитывая число партий во встречах между командами англичан и немцев, французов и англичан, немцев и французов, получаем систему

$$\begin{cases} 5a = 6n, \\ 3f = 2a, \\ 4n = kf, \end{cases} \quad a, n, f, k \in \mathbb{N}.$$

Перемножив эти уравнения, приходим к следствию

$$5 \cdot 3 \cdot 4afn = 6 \cdot 2knaf, \text{ т.е. } k = 5.$$

Остается убедиться, что при $k = 5$ система имеет натуральные решения, например, $a = 6$, $n = 5$, $f = 4$.

$$2. \left\{ -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Тогда $|t| \leq \sqrt{2}$, $t^2 - 1 = 2 \sin x \cos x$. Заметив, что исходное неравенство определено при $\sin x \cos x \neq 0$, т.е. при $|t| \neq 1$, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \left| 2t + \frac{2}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 - 1} \right| \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq -1, \\ \left| t + \frac{1}{t-1} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq -1, \\ \frac{t^2 - t + 1}{|t-1|} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \pm 1, \\ |t-1| \geq t^2 - t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq \pm 1, \\ \left[\begin{aligned} t-1 \geq t^2 - t + 1, &\Leftrightarrow t^2 - 2t + 2 \leq 0, \\ t-1 \leq -t^2 + t - 1 &\Leftrightarrow t^2 \leq 0 \end{aligned} \right] \end{cases} \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Два цвета.

Обозначим через n количество красок, включая белую, которыми раскрашиваются тарелки. Заметим, что при повороте тарелки на угол, кратный $\frac{2\pi}{5}$, кружки переходят друг в друга, и, следовательно, пять таких поворотов соответствуют пяти разным раскраскам набора из пяти кругов, но одному варианту раскраски тарелки.

Пять кружков при помощи n красок можно раскрасить n^5 способами, причем среди них будет n одноцветных раскрасок. Поэтому число различных раскрасок тарелок равно

$$S(n) = \frac{n^5 - n}{5} + n.$$

Если $n = 1$, то $S(1) = 1$; если $n = 2$, то $S(2) = \frac{32 - 2}{5} + 2$. При $n = 3$ получаем $S(3) = \frac{243 - 3}{5} + 3 = 51$, т.е. двух дополнительных цветов (кроме белого) достаточно для раскраски 50 тарелок.

4. $x = 0$; $y = kx + 1004$, $k \in \mathbb{R}$.

Сдвинем обе параболы вниз вдоль оси Oy на 1004. Тогда полученная в результате этого сдвига фигура Φ (рис.4), огра-

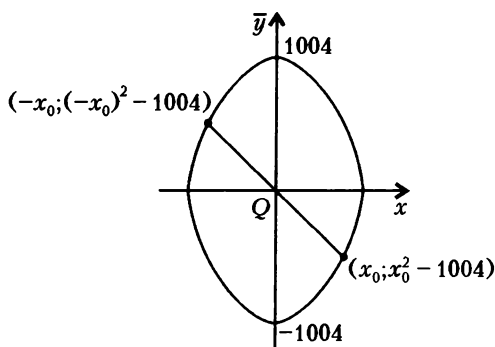


Рис. 4

ниченная кривыми $\bar{y} = x^2 - 1004$ и $\bar{y} = -x^2 + 1004$, имеет центр симметрии в точке Q , поскольку симметрична относительно осей Ox и $O\bar{y}$ одновременно. Поэтому любая прямая, проходящая через точку Q , делит площадь Φ пополам.

Покажем, что других прямых, обладающих этим свойством, нет. В самом деле, пусть некоторая прямая l , $Q \notin l$, делит фигуру Φ на равновеликие части. Проведем прямую $L \parallel l$ так, чтобы $Q \in L$ (рис.5), тогда площади заштрихованных частей Φ равны (и составляют половину площади Φ каждая), т.е. пло-

щадь части фигуры между L и l должна быть равна нулю – противоречие.

Возвращаясь к исходной фигуре, получаем ответ: прямые, проходящие через точку $(0; 1004)$, и только они делят площадь данной фигуры пополам.

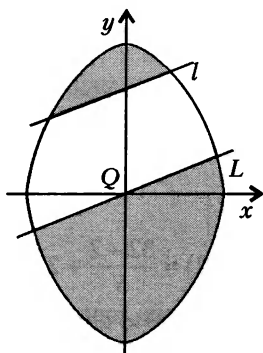


Рис. 5

$$5. \sqrt{\frac{a(a+b)}{c(b+c)}}.$$

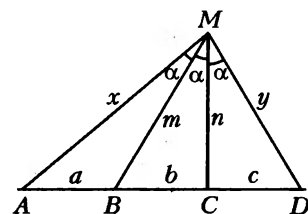


Рис. 6

Пусть $\alpha = \angle AMB = \angle BMC = \angle CMD$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AM = x$, $BM = m$, $CM = n$ и $DM = y$ (рис.6). Тогда из треугольников AMC и BMD по свойству биссектрисы имеем равенства

$$\frac{x}{n} = \frac{a}{b} \text{ и } \frac{m}{y} = \frac{b}{c}.$$

Отношение площадей этих треугольников равно

$$\frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{xn \sin 2\alpha}{my \sin 2\alpha} = \frac{a+b}{b+c}, \text{ т.е. } \frac{xn}{my} = \frac{a+b}{b+c}.$$

Перемножив почленно полученные равенства, имеем

$$\frac{x}{n} \cdot \frac{m}{y} \cdot \frac{xn}{my} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a+b}{b+c} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{a(a+b)}{c(b+c)},$$

откуда и следует ответ.

$$6. \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\sqrt{3} \sin \varphi = \cos \varphi - 2 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right),$$

выписав его 99 раз, полагая $\varphi = x + k \frac{\pi}{3}$ ($k = 1, 2, \dots, 99$).

Умножая k -е тождество почленно на 2^k , получаем

$$2\sqrt{3} \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2^2 \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2^2 \sqrt{3} \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2^2 \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2^3 \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{3}\right);$$

.....

$$2^{99} \sqrt{3} \sin\left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2^{99} \cos\left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2^{100} \cos\left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{3}\right).$$

После почленного сложения этих равенств приходим к выражению

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \left(2^1 \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 2^2 \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \dots + 2^{99} \sin\left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right) &= \\ &= 2 \cos\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 2^{100} \cos\left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2^{100} \cos\left(x + 33\pi + \frac{\pi}{3}\right) = (2 + 2^{100}) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7. а) Нет; б) нет.

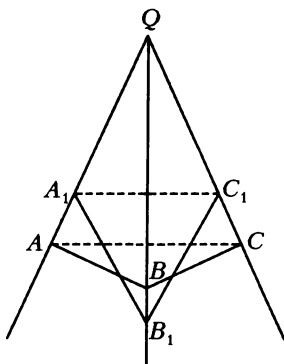
а) Рассмотрим трехгранный угол с вершиной в точке Q и две различные плоскости π и π_1 , первая из которых пересекает ребра этого угла в точках A, B, C , а вторая — в точках A_1, B_1, C_1 (рис.7). Предположим, что площади треугольников AQB и A_1QB_1 , а также BQC и B_1QC_1 попарно равны, т.е.

$$AQ \cdot BQ = A_1Q \cdot B_1Q \quad \text{и}$$

$$BQ \cdot CQ = B_1Q \cdot C_1Q. \quad \text{Рис. 7}$$

Если $AQ = A_1Q$, то $BQ = B_1Q$ и $CQ = C_1Q$, так что плоскости π и π_1 совпадают. Значит, $AQ \neq A_1Q$. Пусть для определенности $AQ > A_1Q$, тогда $BQ < B_1Q$, следовательно, $CQ > C_1Q$. Но тогда $S_{AQC} > S_{A_1QC_1}$.

б) Пусть плоскость π пересекает ребра четырехгранного угла с вершиной в точке Q в точках A, B, C, D . Рассмотрим точки $A_1,$



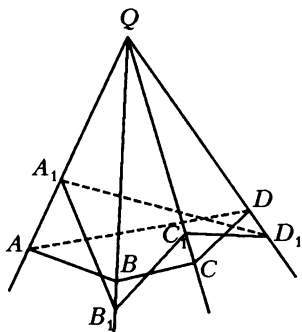


Рис. 8

B_1, C_1, D_1 (рис.8), расположенные на соответствующих ребрах так, чтобы пары треугольников с вершиной в Q , находящиеся в каждой грани, были равновелики. Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, из предположения $AQ > A_1Q$ получаем $BQ < B_1Q$, затем $CQ > C_1Q$ и $DQ < D_1Q$ при том, что

$$\frac{AQ}{A_1Q} = \frac{B_1Q}{BQ} = \frac{CQ}{C_1Q} = \frac{D_1Q}{DQ}.$$

Отсюда следует, что точки A_1, C_1 принадлежат прямой, параллельной диагонали AC плоского четырехугольника $ABCD$, а точки B_1, D_1 — прямой, параллельной другой диагонали этого четырехугольника, причем расположены они по разные стороны от плоскости $ABCD$. Следовательно, эти точки лежат на скрещивающихся прямых, поэтому не могут находиться в одной плоскости.

8. Первая десятичная цифра — это 1, предпоследняя — 2, последняя — 5.

Заметим, что

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} x_n + 1 - \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \Leftrightarrow x_{n+1} - 1 = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} (x_n - 1).$$

Пусть $y_n = x_n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, тогда

$$y_1 = 1, \quad y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} y_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Значит, $\{y_n\}$ — геометрическая прогрессия. Поэтому

$$y_{n+1} = y_1 \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}} \right)^n, \quad \text{так что} \quad y_{1001} = \frac{1}{200^{100}},$$

$$\text{т.е. } x_{1001} = 1 + \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{5^{100}}{10^{100}}.$$

Поэтому первая десятичная цифра x_{1001} равна 1. Поскольку в десятичной записи число 5^k ($k \geq 2$) оканчивается на 25, то предпоследняя цифра — 2, а последняя — 5.

9. 2009^2 .

Отметим, что функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет требованиям задачи, а $f(2009) = 2009^2$.

Пусть $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, — квадратичная функция,

также отвечающая условиям задачи, причем для некоторого значения $x_0 > 1$ имеет место неравенство $g(x_0) \geq f(x_0)$.

Пусть $h(x) = f(x) - g(x)$, тогда $h(x)$ – многочлен не выше второй степени. Так как по условию $0 \leq g(-1)$, $g(0)$, $g(1) \leq 1$, то $h(-1) = 1 - g(-1) \geq 0$, $h(0) = -g(0) \leq 0$, $h(1) = 1 - g(1) \geq 0$, $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \leq 0$. Поэтому уравнение $h(x) = 0$ имеет по меньшей мере три корня, что возможно лишь в случае $h(x) \equiv 0$, т.е. когда $g(x)$ совпадает с $f(x)$.

Итак, максимально возможное значение в точке $x = 2009$ среди квадратичных функций указанного в условии задачи вида принимает $f(x) = x^2$.

10. Такой многоугольник существует для любого $n \geq 3$.

Покажем сначала, что существует бесконечно много прямоугольных треугольников, попарно не подобных между собой, длины сторон которых a , b и c выражаются рациональными числами.

Положим $a = u^2 - 1$, $b = 2u$, $c = u^2 + 1$, где $u \in \mathbb{N}$ (дополнительное условие $u \geq 4$ обеспечивает выполнение неравенств $b < a < c$). Для этих чисел справедливо равенство

$$(u^2 - 1)^2 + (2u)^2 = (u^2 + 1)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Если $A = v^2 - 1$, $B = 2v$ и $C = v^2 + 1$, где $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 4$, то такая тройка чисел также выражает длины сторон прямоугольного треугольника ($B < A < C$).

Для подобия треугольников со сторонами a , b , c и A , B , C соответственно необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{a}{c} = \frac{A}{C} \Leftrightarrow \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} = \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} \Leftrightarrow u = v.$$

Итак, числа $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ при различных натуральных значениях параметра $u \geq 4$ задают бесконечно много прямоугольных треугольников, среди которых нет подобных.

С другой стороны, пара чисел $\left(\frac{2u}{u^2 + 1}; \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)$ может рассматриваться как координаты некоторой точки P на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, причем абсцисса имеет смысл косинуса некоторого угла α , а ордината – синуса этого угла. Тогда сказанное выше означает, что таким образом на этой окружности при разных значениях параметра $u \geq 4$ задается бесконечное множество точек с обеими рациональными координатами.

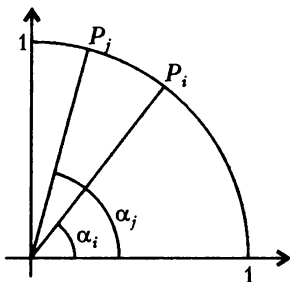


Рис. 9

Выберем теперь $n \geq 3$ таких точек P_1, P_2, \dots, P_n , где $P_k (\cos \alpha_k; \sin \alpha_k)$, причем $\frac{\pi}{4} < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ (рис.9). Рассмотрим далее n точек вида $Q_k (\cos 2\alpha_k; \sin 2\alpha_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и образуемый ими выпуклый многоугольник M (вписанный в единичную окружность). Все его стороны и диагонали являются отрезками вида $Q_i Q_j$. Длина такого отрезка в

силу следствия из теоремы синусов равна

$$|Q_i Q_j| = 2 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha_j - \alpha_i) \quad (i < j)$$

и является рациональным числом, так как

$$\sin(\alpha_j - \alpha_i) = \sin \alpha_j \cos \alpha_i - \cos \alpha_j \sin \alpha_i.$$

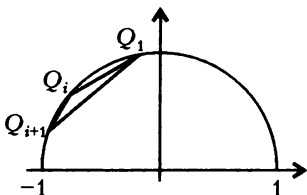


Рис. 10

Площадь многоугольника M равна сумме площадей S_i треугольников $Q_1 Q_i Q_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ (рис.10). Площадь

$$S_i = \frac{1}{2} |Q_1 Q_i| \cdot |Q_1 Q_{i+1}| \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

– число рациональное как произведение рациональных чисел. Следовательно, площадь M – также рациональное число.

Пусть N – наименьшее общее кратное знаменателей всех $2n$ рациональных чисел $\{\cos \alpha_k; \sin \alpha_k\}$. Тогда многоугольник, гомотетичный M с центром гомотетии в начале координат и коэффициентом N^2 , – выпуклый n -угольник, длины всех сторон и диагоналей которого, а также его площадь – натуральные числа.

Вариант 2

1. 2.

Если m – число мальчиков в садике, а n – число девочек, то за день съедается $3m + n$ яблок и $2m + 3n$ груш. По условию

$$3m + n = 2m + 3n \Leftrightarrow \frac{m}{n} = 2.$$

2. 2009.

Функция $f(x) = \arccos(\cos 2x)$ определена на всей прямой, имеет в качестве множества значений отрезок $[0; \pi]$, является четной и периодической с основным периодом π . Функция $g(x) = \frac{2x}{2009}$ – линейная, причем $g(x) < 0$ при $x < 0$ и $g(x) > \pi$ при $x > \frac{2009}{2}\pi$ (рис.11). Поэтому все решения уравнения $f(x) = g(x)$ находятся на промежутке $\left[0; \frac{2009}{2}\pi\right]$. Нетрудно установить их число: оно равно 2009.

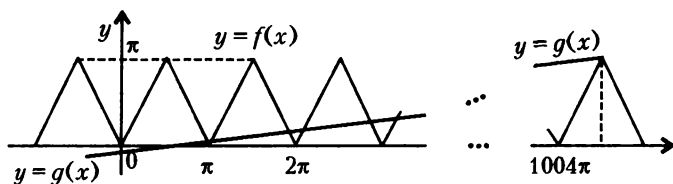


Рис. 11

3. $-5; \frac{1}{2}$.

Перепишем данное уравнение так:

$$\sqrt{(2x-1)(4x-5)} = \sqrt{(2x-1)(x+1)} + \sqrt{(2x-1)(2x+1)}$$

и возведем его в квадрат. После упрощений получим уравнение

$$(2x-1)(x-7) = 2\sqrt{(2x-1)^2(x+1)(x+1)}, \quad (*)$$

которое тоже возведем в квадрат. После упрощений приходим к уравнению

$$(2x-1)^2(7x^2+6x-45) = 0,$$

корни которого $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -5$, $x_3 = \frac{9}{7}$. Исходному уравнению удовлетворяют x_1 и x_2 , а при $x = x_3$ левая часть уравнения (*) отрицательна.

4. $45 : 8$.

Возможны два случая расположения точек A и O (рис.12, 13). Однако в любом случае по теореме об отрезках касательной и секущей имеем

$$BD^2 = OD \cdot AD = DC^2, \text{ значит, } BD = DC = 2,$$

следовательно, AD – медиана треугольника ABC . Тогда, исполь-

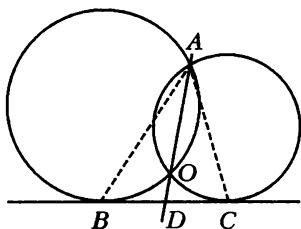


Рис. 12

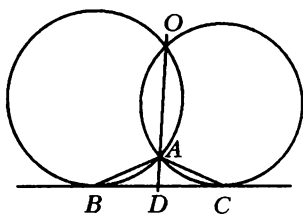


Рис. 13

зую формулу для медианы, находим

$$AD = \frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2} = \frac{\sqrt{106}}{2}.$$

Поскольку $AD > 2 = BD$, то случай рисунка 10 невозможен.

Для второго случая получаем $OD = \frac{BD^2}{AD} = \frac{8}{\sqrt{106}}$, $AO =$
 $= AD - OD = \frac{\sqrt{106}}{2} - \frac{8}{\sqrt{106}} = \frac{45}{\sqrt{106}}$, поэтому $\frac{AO}{OD} = \frac{45}{8}$.

5. $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2]$.

Заметим, что исходное уравнение приводится к виду

$$3^{-(x+a)^2 + (a-1)^2} = \log_3 \left(\frac{1}{2} \frac{|x+a|}{|a-1|} + \frac{5}{2} \right).$$

Пусть $t = \frac{|x+a|}{|a-1|}$ (здесь $t \geq 0$), тогда $|x+a| = t|a-1|$ и

$$3^{(1-t^2)(a-1)^2} = \log_3 \frac{t+5}{2}. \quad (*)$$

Если $0 \leq t < 1$, то левая часть в $(*)$ больше 1, тогда как $\log_3 \frac{t+5}{2} < 1$, поэтому уравнение решений не имеет. Аналогично можно убедиться, что нет решений и при $t > 1$. Таким образом, равенство $(*)$ возможно лишь для $t = 1$, т.е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \neq 1, \\ |x+a| = |a-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 1 - 2a. \end{cases} \end{cases}$$

Поэтому для того, чтобы все решения данного уравнения принадлежали отрезку $[-3; 0]$, необходимо и достаточно выполнения условий $-3 \leq 1 - 2a \leq 0$, $a \neq 1$. Отсюда и получается ответ.

6. $k = 3$ и $k = 5$.

Пусть b – первый член геометрической прогрессии, а q – ее знаменатель ($b, q \in \mathbb{Z}, bq \neq 0$). Тогда при $q = 1$ имеем

$$A(k) = \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} = \frac{kb^2}{kb} = b,$$

так что дробь сократима при всех значениях k ,

Если же $q \neq 1$, то

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k = b + bq + \dots + bq^{k-1} = \frac{b(q^k - 1)}{q - 1},$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2 = b^2 + b^2q^2 + \dots + b^2q^{2(k-1)} = \frac{b^2(q^{2k} - 1)}{q^2 - 1}.$$

Поэтому

$$A(k) = b \frac{(q^{2k} - 1)(q - 1)}{(q^2 - 1)(q^k - 1)} = b \frac{q^k + 1}{q + 1}.$$

Дробь в выражении $A(k)$ сократима, если k – нечетное число. Для $k = 3$ имеем $A(3) = b \frac{q^3 + 1}{q + 1} = b(q^2 - q + 1)$; а для $k = 5$ получаем $A(5) = b \frac{q^5 + 1}{q + 1} = b(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$, при этом числа $A(3)$ и $A(5)$ – целые. Таким образом, значения $k = 3$ и $k = 5$ отвечают требованиям задачи.

В то же время, к примеру, для $b = 1$ и $q = 2$ получаем $A(4) = \frac{2^4 + 1}{2 + 1} = \frac{17}{3}$, т.е. при $k = 4$ первое из чисел задачи не делится нацело на второе.

Вариант 3

$$1. \frac{\pi}{4} - \frac{2009}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(x + 2009) &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x + 2009\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{2009}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Можно.

Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна

$$l = \sqrt{1^2 + 1^2 + (1,5)^2} = \sqrt{4,25} > 2,06,$$

так как $(2,06)^2 = 4 + 0,24 + 0,0036 = 4,2436 < 4,25$.

3. $\{0\}$.

Оценим левую часть неравенства:

$$\frac{6^{x+1}}{9^x + 4^x} = \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x} \leq \frac{6}{2} = 3,$$

поскольку $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$.

В то же время $x^2 + 3 \geq 3$, поэтому данное нестрогое неравенство может выполняться только при условиях:

$$\begin{cases} \frac{6^{x+1}}{9^x + 4^x} = 3, \\ x^2 + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

4. $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}; 0\right)$.

Обозначим $f(x) = ax^2 + x + 2a^2$, $g(x) = ax^2 + 2x - 2a^2$ и заметим, что поскольку каждое из уравнений должно иметь по два корня, то $a \neq 0$. Тогда $x_f^0 = -\frac{1}{2a}$ и $x_g^0 = -\frac{1}{a}$ — абсциссы вершин парабол, являющихся графиками $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если $a > 0$, то $x_g^0 < x_f^0$ и условие задачи иллюстрирует рисунок 14. Для расположения корней, указанного в условии, необходимо и достаточно существование единственной точки x^* такой, что $f(x^*) = g(x^*) < 0$.

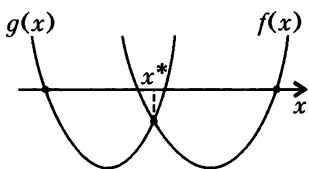


Рис. 14

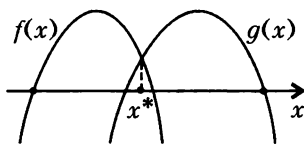


Рис. 15

Если же $a < 0$, то $x_f^0 < x_g^0$ (рис.15) и требование задачи выполнено тогда и только тогда, когда найдется единственная точка x^* , для которой

$$f(x^*) = g(x^*) > 0.$$

Заметим, что

$$f(x^*) = g(x^*) \Leftrightarrow x^* = 4a^2,$$

и тогда в любом из двух случаев справедливо неравенство

$$a \cdot f(4a^2) < 0 \Leftrightarrow 2a^3(8a^3 + 3) < 0,$$

откуда $-\sqrt[3]{3} < a < 0$.

5. $AB = \sqrt{35}$ см, $AC = BC = 3\sqrt{35}$ см.

Обозначим через AE , BF и CD высоты исходного треугольника (рис.16). Согласно условию задачи, $AH = BH$, т.е. треугольник AHB – равнобедренный. Пусть $\angle HAB = \alpha$, тогда $\angle ABF = \alpha$, следовательно, $\angle FAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle ACD = \alpha$, значит, $\angle CAH = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$.

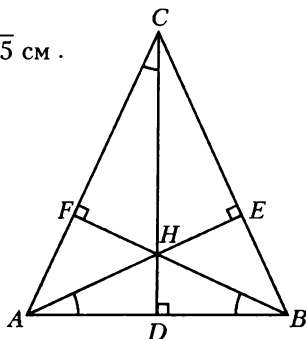


Рис. 16

Таким образом, по теореме синусов для треугольника ACH имеем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{AH}{CH}, \text{ т.е. } \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{3}{17}.$$

Решая уравнение

$$17 \sin \alpha = 3 \cos 2\alpha \Leftrightarrow 6 \sin^2 \alpha + 17 \sin \alpha - 3 = 0,$$

получаем единственное возможное значение $\sin \alpha = \frac{1}{6}$.

Теперь, заметив, что треугольник ACB – равнобедренный, находим $\cos \alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$ и далее: $AD = AH \cos \alpha = \frac{\sqrt{35}}{2}$, $AB = 2AD = \sqrt{35}$, $AC = BC = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{6\sqrt{35}}{2} = 3\sqrt{35}$.

6. а) Функция неперiodическая; б) функция периодическая с периодом $2\pi k$; в) функция периодическая с периодом $\frac{\pi}{2}k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$).

а) Функция $y_1 = \sin|x| = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$ неперiodическая (рис.17).

В самом деле, если $T > 0$ – основной период $y_1(x)$, то не может быть $T < 2\pi$ (это про-

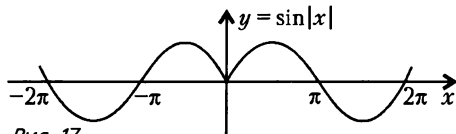


Рис. 17

тиворечит свойствам функции $y = \sin x$). Невозможно и значение $T \geq 2\pi$, так как в этом случае существовало бы бесконечно много промежутков длины 2π , на которых $y_1(x) \geq 0$ (так же, как при $x \in [-\pi; \pi]$).

б) Функция $y_2 = \cos|x| = \cos x$ периодическая с основным периодом $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

в) Функция $y_3 = |\sin x| + |\cos x|$ периодическая с основным периодом $T = \frac{\pi}{2}$.

Действительно, $y_3\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = |\cos x| + |\sin x| = y_3(x)$ для любого значения x . В то же время не может быть $T < \frac{\pi}{2}$, поскольку максимальное значение функции $y_3(x)$, равное $\sqrt{2}$, принимается ею только в точках $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$. Это следует из рассмотрения при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$y_3 = |\sin x| + |\cos x| = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Вариант 4

1. $(-\infty; 0]$.

Пусть $t = 2^x$, тогда данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 + 2008t - 2009 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ -2009 \leq t \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1,$$

следовательно, $x \leq 0$.

2. 5 членов.

Члены арифметической прогрессии имеют вид $a_n = 12 + 3(n-1) = 9 + 3n$, где $n = 1, 2, \dots, 2009$. Члены геометрической прогрессии задаются формулой $b_k = 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, степени тройки содержатся среди чисел $\{a_n\}$. Найдем их количество:

$$a_1 = 12 \leq 3^k \leq a_{2009} = 3 \cdot (2009 + 3) \Leftrightarrow 4 \leq 3^{k-1} \leq 2012,$$

откуда $3 \leq k \leq 7$, т.е. всего пять чисел.

3. $\frac{11\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение данного уравнения сводится к рассмотрению двух случаев.

$$а) \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) = 0, \\ \sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{11\pi}{8} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right) > 0. \end{cases}$$

Так как

$$\sin\left(2x_n + \frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

то все числа серии $\{x_n\}$ являются решениями исходного уравнения.

$$б) \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right) = 1, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = -\frac{5\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Проверим выполнение дополнительного условия, вычислив

$$\cos\left(\frac{x_k}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{16} - \frac{11\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}\right) = \cos\left(-\pi + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Отсюда следует, что при нечетных значениях k

$$\cos\left(\frac{x_k}{2} - \frac{11\pi}{16}\right) = 0,$$

значит, эта серия не содержит решений задачи.

Для значений $k = 2m$ косинус, очевидно, не обращается в ноль, так что числа $x = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi m$ – решения. Нетрудно заметить, что это та же серия, что получена в п. а).

4. ± 3 .

Рассмотрим задачу на координатной плоскости Oxa . Так как

$$|x - a| \leq 3 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x^2 + x - 3, & \text{если } x \geq a, \\ a \leq -x^2 + x + 3, & \text{если } x \leq a, \end{cases}$$

то заштрихованная фигура на рисунке 18 представляет собой множество решений данного неравенства, понимаемых как точки вида $(x; a)$ (т.е. значение x дается вместе с соответствующим значением параметра). Сечение этой фигуры прямой $a = a_0$ определяет решение неравенства при заданном значении a_0 . Ответ задачи – все те значения параметра, при каждом из которых длина отрезка в сечении равна 1.

Нетрудно заметить, что отрезок такой длины находится целиком либо в полуплоскости $a \geq x$, либо – в $a \leq x$. В первом

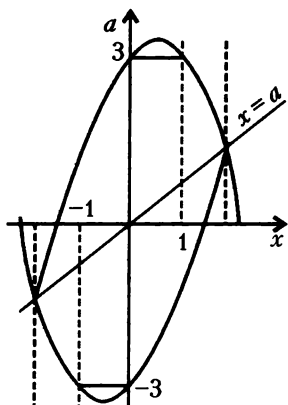


Рис. 18

случае, чтобы получить искомое значение a , для корней x_1, x_2 уравнения $-x^2 + x + 3 = a$ вычислим

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2|^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \\ &= 1^2 - 4(a - 3) = 13 - 4a. \end{aligned}$$

Поскольку $|x_1 - x_2| = 1$, то $a = 3$.

Аналогично рассматривается другой случай.

5. 5 см и 4 см.

Пусть $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = 2\alpha$, тогда из теоремы косинусов следует уравнение

$$b^2 + c^2 - \frac{1}{4}bc = 36.$$

Второе уравнение получаем, записав условие равенства площадей

$$bc \sin 2\alpha = (b + c) \cdot AL \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow 2bc \cos \alpha = (b + c) \cdot AL.$$

Из равенства $2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha = \frac{1}{8}$ находим $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ (из условия задачи следует, что угол 2α , а значит, и α , — острый). Таким образом,

$$9bc = 20(b + c).$$

Вводя переменные $u = b + c$, $v = bc$, переходим к системе

$$\begin{cases} u^2 - \frac{9}{4}v = 36, \\ 9v = 20u. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 5u - 36 = 0, \\ 9v = 20u. \end{cases}$$

Отсюда $u = 9$, $v = 20$ и, далее, $b = 5$, $c = 4$ (либо наоборот).

6. Возможно только значение 5.

Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, а P и S — его периметр и площадь соответственно, то

$$\frac{P}{\sqrt{S}} = \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}{\frac{1}{2}ab} = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} \right) \geq \sqrt{2} (2 + \sqrt{2})$$

(в оценке дважды использовано неравенство для суммы положительных взаимно обратных чисел). Так как $2 + 2\sqrt{2} > 4,8$, то первые два из данных значений это отношение принимать не может.

Чтобы показать, что значение $\frac{P}{\sqrt{S}} = 5$ возможно, достаточно установить, существует положительное решение уравнения

$$t + \frac{1}{t} + \sqrt{t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad (\text{здесь } t = \sqrt{\frac{a}{b}}).$$

Заменой $u = t + \frac{1}{t}$ это уравнение сводится к

$$\sqrt{u^2 - 2} = \frac{5}{\sqrt{2}} - u \Leftrightarrow u = \frac{29}{10\sqrt{2}}.$$

Наконец,

$$t + \frac{1}{t} = \frac{29}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow t^2 - \frac{29}{10\sqrt{2}}t + 1 = 0,$$

где дискриминант квадратного трехчлена больше нуля и уравнение имеет два положительных корня (это следует из теоремы Виета).

Вариант 5

1. $\pm 1; \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 + 12x + 12} = 2x + 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0, \\ x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2}, \\ x^2 = 1 \quad \text{или} \quad x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right).$$

Имея в виду, что $36^{x^2} \geq 1$, получаем

$$\begin{aligned} |36^{x^2} - 1| - 2 &= 36^{x^2} - 3; \\ |36^{x^2} - 3| \geq 3 &\Leftrightarrow 36^{x^2} \geq 6 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. 1,5 км.

Пусть x км – расстояние от дома до ларька, y км – расстояние от ларька до рынка. Тогда из условия задачи следует равенство

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x + y = \frac{3}{2}.$$

$$4. \frac{3\pi}{8} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $\left| 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{8}\right) \right| \leq 2$, а в силу свойства взаимно обратных чисел $|\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x| \geq 2$. Поэтому данное уравнение разрешимо лишь в случае, когда оба неравенства превращаются в равенства. Таким образом, следует рассмотреть две ситуации.

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1, \\ \sin\left(3x + \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{24} + \frac{2\pi n}{3} \Leftrightarrow 8n - 6k = 1. \end{aligned}$$

Но последнее равенство не может быть выполнено, так как его левая часть — число четное, а правая — нечетное, значит, в этом случае решений нет.

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -1, \\ \sin\left(3x + \frac{3\pi}{8}\right) = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = -\frac{7\pi}{24} + \frac{2\pi n}{3}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = -\frac{7\pi}{24} + \frac{2\pi n}{3} \Leftrightarrow 4n = 3k + 1. \end{aligned}$$

Решениями последнего уравнения являются числа $n = 3l + 1$, $k = 4l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому решения исходного уравнения имеют вид $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi l$.

$$5. \quad AB = \frac{3}{2} \text{ см}, \quad BC = \frac{33}{10} \text{ см}.$$

Пусть K, L, N — точки, в которых вписанная окружность касается сторон треугольника (рис. 19), $AK = x$, $BK = y$, $BM = m$. Тогда $AN = x$, $BL = y$, $CN = CL = 3 - x$.

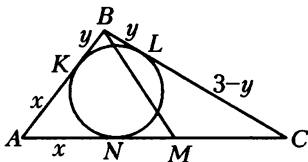


Рис. 19

По теореме об отрезках касательной и секущей

$$BK^2 = \frac{1}{4}m \cdot \frac{3}{4}m, \quad MN^2 = \frac{1}{4}m \cdot \frac{3}{4}m,$$

следовательно, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}m$, $MN = y$, значит, $AB = AM = \frac{3}{2}$.

Теперь, используя формулу для медианы

$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - AC^2},$$

получаем уравнение

$$4m^2 = \frac{9}{2} + 2(y - x + 3)^2 - 9.$$

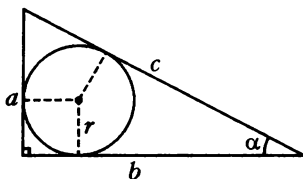
Отсюда, имея в виду, что $m = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{3}{2} - y$, приходим к равенству $y = \frac{9}{10}$, так что $BC = 2y + \frac{3}{2} = \frac{33}{10}$.

6. Возможно только значение $2\frac{1}{2}$.

Если a , b и c – катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, а r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно (рис.20), то по теореме о равенстве отрезков касательных имеем

$c = (a - r) + (b - r)$, откуда

$$a + b = 2r + 2R. \quad \text{Рис. 20}$$



Пусть α – меньший из острых углов треугольника, тогда $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \cos \alpha$, поэтому

$$R(\sin \alpha + \cos \alpha) = r + R \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{r}{R}. \quad (*)$$

Поскольку $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, откуда получаем оценку $0 < \frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1$.

Таким образом, для искомого отношения имеем

$$\frac{R}{r} \geq \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 > 2,4.$$

Итак, из предложенных трех значений первые два это отношение принимать не может. Равенство $\frac{R}{r} = \frac{5}{2}$ возможно; соответствующую величину угла α прямоугольного треугольника можно определить из равенства (*) (сделайте это !)

ФИЗИКА

Заочный тур

1. Поскольку максимальная дальность полета мячика $x_m = \frac{v_0^2}{g} = 0,2$ м меньше, чем удвоенная ширина желоба $2L =$

$= 0,6$ м, вылет шарика из желоба сразу после удара о вертикальную стенку при данных из условия задачи невозможен. Следовательно, минимально возможное число соударений мячика со стенкой и дном желоба перед вылетом из него равно двум.

Для упрощения анализа движения мячика в желобе воспользуемся известным приемом, согласно которому траекторию мячика после упругого удара о вертикальную стенку можно представить

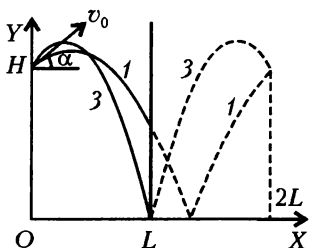


Рис. 21

как зеркальное (относительно стенки) отражение воображаемого участка траектории, по которому летел бы мячик после стенки в ее отсутствие. На рисунке 21 эти участки изображены штриховыми линиями. Там в качестве примера представлены две траектории мячика, удовлетворяющие условию задачи.

Двигаясь по каждой из этих траекторий, мячик по одному разу ударяется о дно и стенку желоба, причем на траектории 3 эти соударения происходят в бесконечно близких точках. Горизонтальное перемещение мячика за время движения составляет $2L$, в конечной точке траектории он поднимается над дном желоба на высоту H .

Для описания движения мячика воспользуемся системой координат XOY с началом в левом нижнем углу желоба. Координаты и проекции скорости мячика описываются такими кинематическими уравнениями:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = H + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Рассмотрим вначале движение мячика по траектории 1. При упругом ударе о дно горизонтальная проекция скорости мячика не меняется, а вертикальная проекция меняет знак на противоположный, оставаясь прежней по модулю. Из уравнения для вертикальной проекции скорости находим время t_1 от начала движения мячика до момента падения на дно желоба и время t_2 от момента удара о дно желоба до подъема мячика на исходную высоту H :

$$t_1 = \frac{v_y + v_0 \sin \alpha}{g}, \quad t_2 = \frac{v_y - v_0 \sin \alpha}{g},$$

где $v_y = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}$ – вертикальная проекция скорости мячика в момент удара о дно желоба. Горизонтальное переме-

шение мячика за время полета $t_1 + t_2 = \frac{2v_y}{g}$ равно $2L$. Отсюда получаем уравнение относительно угла α :

$$\frac{2v_0^2 \cos \alpha}{g} \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gH}{v_0^2}} = 2L.$$

Вводя новую переменную $\beta = \sin^2 \alpha$, преобразуем это уравнение к виду

$$\beta^2 + \left(\frac{2gH}{v_0^2} - 1 \right) \beta - \left(\frac{2gH}{v_0^2} - \left(\frac{gL}{v_0^2} \right)^2 \right) = 0, \text{ или } \beta^2 + 3\beta - 1,75 = 0.$$

Корни этого уравнения равны $\beta = -1,5 \pm 2$. Имеет смысл положительный корень $\beta = 0,5$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = -45^\circ.$$

Траектория 2 (рис.22), соответствующая углу бросания $\alpha_2 = -45^\circ$, является зеркальным отражением траектории 1 относительно вертикальной стенки. При движении по траектории 3 мячик попадает в угол, образованный дном и правой стенкой желоба, испытывая с ними соударения в двух бесконечно близких точках. Движение мячика после соударений происходит по той же траектории в обратном направлении. Для определения угла α_3 , соответствующего этой траектории, воспользуемся уравнением, описывающим участок траектории от точки бросания до угла желоба:

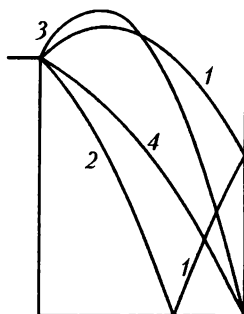


Рис. 22

$$y(x) = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Подставляя в него $x = L$, $y = 0$, получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \frac{v_0^2}{gL} \operatorname{tg} \alpha + 1 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} = 0.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\operatorname{tg} \alpha_{3,4} = \frac{v_0^2}{gL} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL} \right)^2 + \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1} = \frac{2 \pm \sqrt{11}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 \approx 1,772, \operatorname{tg} \alpha_4 \approx -0,439, \alpha_3 \approx 60^\circ 34', \alpha_4 \approx -23^\circ 42'.$$

Итак, углы, под которыми нужно бросать мячик, равны $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = -45^\circ$, $\alpha_3 \approx 60^\circ 34'$, $\alpha_4 \approx -23^\circ 42'$. Траектории мячика, соответствующие этим углам, изображены на рисунке 22.

2. Пусть m_1 и m_2 – массы поршней, S – площадь каждого из них, p_0 – атмосферное давление. Из условий равновесия поршней в начальном состоянии, т.е. при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$, находим давления гелия в сосудах:

$$p_1 = p_0 + \frac{m_1 g}{S}, \quad p_2 = p_0 + \frac{m_2 g}{S},$$

откуда

$$p_2 - p_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{S}.$$

Уравнения начального состояния гелия в сосудах имеют вид

$$p_1 H S = \nu_1 R T_0, \quad p_2 H S = \nu_2 R T_0.$$

При температуре $T > T_0$ на каждый из поршней начнет действовать также сила упругости F со стороны коромысла. Условия равновесия поршней в этом случае примут вид

$$p'_1 = p_0 + \frac{m_1 g}{S} + \frac{F}{S}, \quad p'_2 = p_0 + \frac{m_2 g}{S} + \frac{F}{S},$$

откуда

$$p'_2 - p'_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{S},$$

т.е. разность давлений гелия в сосудах не изменится. Уравнения состояния гелия при температуре T будут иметь вид

$$p'_1 (H - h) S = \nu_1 R T, \quad p'_2 (H + h) S = \nu_2 R T,$$

где h – перемещение каждого из поршней. Приравнявая разности давлений гелия при температурах T_0 и T , получаем соотношение

$$\frac{(\nu_2 - \nu_1) R T_0}{H S} = \left(\frac{\nu_2}{H + h} - \frac{\nu_1}{H - h} \right) \frac{R T}{S}.$$

Полагая $h \ll H$ и пренебрегая h^2 по сравнению с H^2 , находим приближенно

$$h \approx H \frac{(\nu_2 - \nu_1)(T - T_0)}{(\nu_2 + \nu_1)T}.$$

Учтем далее, что угол поворота коромысла мал, т.е.

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{2h}{L}.$$

Следовательно,

$$\varphi \approx \frac{2H}{L} \frac{(v_2 - v_1)t}{(v_2 + v_1)(t + 273)},$$

где t — измеряемая температура по шкале Цельсия. При комнатной температуре можно пренебречь в знаменателе получившегося выражения слагаемым t по сравнению со слагаемым 273 (°C). Поэтому связь между углом поворота коромысла $\Delta\varphi$ и изменением температуры Δt имеет вид

$$\Delta\varphi \approx \frac{2H}{LT_0} \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \Delta t.$$

Учитывая, что $\Delta x = \left(\frac{L}{2} + l\right)\Delta\varphi$ и полагая $\Delta t = 1^\circ\text{C}$, получаем ответ:

$$\Delta x = 1 \text{ мм.}$$

3. Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным кольцом на его оси, по величине определяется известным выражением

$$E_0 = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

и направлена по оси кольца. При $h = R$ сила, действующая на заряд q со стороны целого кольца, равна

$$F_0 = \frac{Qq}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции, удаление небольшой части заряженного кольца эквивалентно помещению на целое кольцо в месте выреза точечного заряда, равного по величине заряду $\Delta Q = Q\Delta\varphi/(2\pi)$ вырезанной части и противоположного ему по знаку. Этот заряд действует на заряд q силой

$$F_1 = \frac{q\Delta Q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + h^2)} = \frac{qQ\Delta\varphi}{16\pi^2\epsilon_0 R^2}.$$

Следовательно (рис.23),

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1.$$

По теореме косинусов имеем

$$F^2 = F_0^2 + F_1^2 - 2F_0F_1 \cos \alpha, \text{ где } \alpha = 45^\circ.$$

Отсюда получаем

$$F = \frac{qQ}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{1 - \frac{\Delta\varphi}{\pi} + \frac{\Delta\varphi^2}{2\pi^2}}.$$

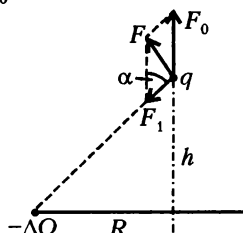


Рис. 23

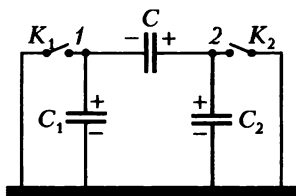


Рис. 24

обладает некоторой емкостью относительно Земли. Поэтому можно считать, что обкладки и Земля образуют конденсаторы, емкости которых обозначим через C_1 и C_2 (рис.24). Соединение обкладок конденсатора емкостью C с Землей соответствует поочередному замыканию ключей K_1 и K_2 .

Рассмотрим первый шаг процесса. Пусть начальный потенциал точки 1 относительно Земли равен φ_1 , а начальная разность потенциалов на конденсаторе емкостью C равна U_0 . При замыкании ключа K_1 суммарный заряд на положительно заряженных обкладках конденсаторов емкостями C и C_2 не изменится, а сами конденсаторы окажутся соединенными параллельно, поскольку потенциал точки 1 станет равным потенциалу Земли. По закону сохранения заряда,

$$CU_0 + C_2(U_0 + \varphi_1) = (C + C_2)\varphi_2^{(1)}.$$

Таким образом, после замыкания ключа K_1 потенциалы точек 1 и 2 относительно Земли будут, соответственно, равны

$$\varphi_1^{(1)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} = U_0 + \frac{C_2}{C + C_2} \varphi_1 = U_1.$$

Здесь U_1 — это разность потенциалов на конденсаторе емкостью C после первого шага процесса.

На втором шаге (после размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2) потенциал точки 2 станет равным потенциалу Земли:

$$\varphi_2^{(2)} = 0.$$

По закону сохранения заряда, на отрицательно заряженных обкладках конденсаторов емкостями C и C_1 имеем

$$-CU_1 = (C + C_1)\varphi_1^{(2)}.$$

Следовательно, после второго шага потенциал точки 1 станет

$$\varphi_1^{(2)} = -\frac{C}{C + C_1} U_1,$$

а разность потенциалов на конденсаторе емкостью C примет

значение

$$U_2 = \frac{C}{C + C_1} U_1.$$

Рассуждая аналогично, находим разность потенциалов на конденсаторе емкостью C после третьего шага:

$$U_3 = \frac{C}{C + C_2} U_2,$$

после четвертого шага:

$$U_4 = \frac{C}{C + C_1} U_3$$

и т.д.

Введем обозначения

$$\gamma_1 = \frac{C}{C + C_1}, \quad \gamma_2 = \frac{C}{C + C_2}$$

и запишем полученный результат в виде

$$U_2 = \gamma_1 U_1, \quad U_3 = \gamma_1 \gamma_2 U_1, \quad U_4 = \gamma_1^2 \gamma_2 U_1, \quad U_5 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 U_1, \quad \dots$$

Для отношений начального напряжения на конденсаторе к напряжениям в процессе его разрядки имеем

$$k_1 = \frac{U_0}{U_1} = \frac{U_0}{U_0 + (1 - \gamma_2) \varphi_1}, \quad k_2 = \frac{U_0}{U_2} = \frac{k_1}{\gamma_1}, \quad k_3 = \frac{U_0}{U_3} = \frac{k_1}{\gamma_1 \gamma_2},$$

$$k_4 = \frac{U_0}{U_4} = \frac{k_1}{\gamma_1^2 \gamma_2}, \quad k_5 = \frac{U_0}{U_5} = \frac{k_1}{(\gamma_1 \gamma_2)^2} \text{ и т.д.}$$

Видно, что начиная с k_3 все нечетные значения коэффициентов k_i содержат произведение $\gamma_1 \gamma_2$ в целой степени. Поэтому, хотя величина k_1 нам неизвестна, так как неизвестен начальный потенциал точки 1, полученные соотношения позволяют найти $\gamma_1 \gamma_2$ по двум нечетным значениям k_i . После этого можно определить любое нечетное k . По условию,

$$k_3 = \frac{k_1}{\gamma_1 \gamma_2}, \quad k_7 = \frac{k_1}{(\gamma_1 \gamma_2)^3}.$$

Отсюда находим ответ:

$$k_1 = k_3 \sqrt{\frac{k_3}{k_7}}.$$

5. В первую очередь пассажир увидит свет, испущенный правой фарой поезда. Ход луча для этого случая изображен на рисунке 25. Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R - a}{x}, \quad a = \frac{R - d}{\cos \beta}, \quad l - x = d \operatorname{ctg} \beta.$$

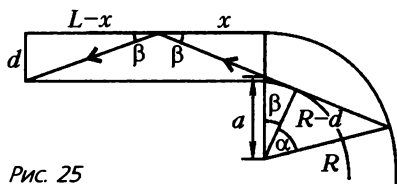


Рис. 25

Исключая из этих соотношений x и a , приходим к равенству

$$(R+d)\operatorname{ctg}\beta = l + \frac{R-d}{\sin\beta}.$$

Используя известную формулу $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}$, получаем квадратное уравнение относительно $\sin\beta$:

$$\sin^2\beta + 2\frac{l(R-d)}{l^2 + (R+d)^2}\sin\beta - \frac{4Rd}{l^2 + (R+d)^2} = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет положительный корень:

$$\sin\beta = \frac{l(R-d)}{l^2 + (R+d)^2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Rd(l^2 + (R+d)^2)}{l^2(R-d)^2}} - 1 \right) \approx 0,062.$$

Отсюда находим

$$\beta \approx 0,062 \text{ рад.}$$

Из рисунка также видно, что

$$\cos\alpha = \frac{R-d}{R}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \arccos \frac{R-d}{R} \approx 0,451 \text{ рад, и } \alpha + \beta \approx 0,513 \text{ рад.}$$

Путь, пройденный поездом при его движении в тоннеле с постоянной скоростью $v_0 = 20$ м/с, равен

$$l = \left(R - \frac{d}{2} \right) (\alpha + \beta) \approx 24,4 \text{ м,}$$

затраченное на это время равно

$$\tau_1 = \frac{l}{v_0} \approx 1,2 \text{ с.}$$

Время, в течение которого поезд тормозит на станции, составляет

$$\tau_2 = \frac{2L}{v_0} = 16 \text{ с.}$$

Итак, поезд остановится через

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \approx 17,2 \text{ с.}$$

1. Дождевая капля падает вертикально под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Будем считать систему отсчета, связанную с землей, инерциальной, а ось X этой системы – направленной вертикально вниз. Учитывая, что дождевые облака обычно находятся на высотах, меньших нескольких километров, будем пренебрегать изменением ускорения свободного падения g . Поэтому уравнение движения падающей капли в проекции на ось X , согласно второму закону Ньютона, можно представить в виде

$$ma = mg - \alpha v,$$

где m – масса капли, a – проекция ее ускорения на ось X , α – коэффициент вязкого трения, а v – модуль скорости капли. Из написанного выражения и условия задачи получаем

$$\alpha = m \frac{g - a}{v}.$$

По условию задачи капля падает с большой высоты. Поэтому следует считать, что вблизи поверхности земли капля будет двигаться вертикально вниз практически равномерно со скоростью, модуль которой равен

$$v_{\max} = \frac{mg}{\alpha} = \frac{gv}{g - a}.$$

Полагая, что при скольжении капли по стеклу автомобиля на нее не действуют силы трения, находим искомый угол наклона следа капли к вертикали:

$$\beta = \arctg \frac{u}{v_{\max}} = \arctg \left(\left(1 - \frac{a}{g} \right) \frac{u}{v} \right) = \arctg \frac{10}{7} \approx 55^\circ.$$

2. Будем, как обычно, считать, что плоскость покоится относительно земли, а связанная с ней система отсчета является инерциальной. По условию задачи грузы скользят, оставаясь на неизменном расстоянии l друг от друга. Следовательно, их ускорения a нужно считать одинаковыми и направленными вниз вдоль наклонной плоскости, перпендикулярно ее ребру.

Модуль нормальной составляющей силы реакции плоскости на первый груз равен $F_1 = m_1 g \cos \alpha$, а на второй – $F_2 = m_2 g \cos \alpha$, где g – модуль ускорения свободного падения. Полагая, что сила трения скольжения, действующая на каждый из грузов, равна максимальной силе сухого трения покоя, находим, согласно закону Кулона – Амонтона, модули сил трения, действующих на

грузы:

$$F_{\text{тp1}} = \mu_1 F_1, \quad F_{\text{тp2}} = \mu_2 F_2.$$

На первый (нижний груз) со стороны пружины действует сила упругости, проекция которой на направление его движения равна $-kx$, где $x = l - l_0$ — удлинение пружины, а l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии. При этом со стороны пружины на второй груз действует сила упругости, проекция которой на направление его движения равна $+kx$.

Учитывая, что проекции сил тяжести, действующих на грузы, на направления вдоль наклонной плоскости равны $m_1 g \sin \alpha$ и $m_2 g \sin \alpha$, уравнения движения грузов, согласно второму закону Ньютона, запишем в виде

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - kx,$$

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha + kx.$$

Умножая первое уравнение на m_2 , второе на m_1 и почленно вычитая уравнения, получим

$$x = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(\mu_2 - \mu_1) g \cos \alpha}{k}.$$

Следовательно, длина недеформированной пружины равна

$$l_0 = l - x = l - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(\mu_2 - \mu_1) g \cos \alpha}{k}.$$

Складывая почленно упомянутые уравнения движения грузов, получаем искомое ускорение грузов:

$$a = g \left(\sin \alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha \right).$$

Отметим, что условие задачи корректно, если $a > 0$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha > (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) / (m_1 + m_2)$.

3. Будем считать систему отсчета, связанную с потолком комнаты, инерциальной. По условию задачи на шарик действуют только сила тяжести и сила натяжения нити. Поэтому направление ускорения шарика и ось нити могут совпадать только в момент прохождения шариком положения равновесия, т.е. тогда, когда ускорение шарика направлено строго вертикально. В этот момент кинетическая энергия шарика максимальна и равна $\frac{1}{2} m v^2$, где v — модуль скорости шарика в указанный момент времени. Если считать, что в этот момент времени потенциальная энергия шарика равна нулю, то в момент отпущения шарика его потенциальная энергия была рав-

на $mgL(1 - \cos \alpha)$, где L – длина нити, на которой подвешен шарик.

Поскольку влиянием воздуха на шарик следует пренебречь и движение шарика рассматривается относительно инерциальной системы отсчета, то, согласно закону сохранения механической энергии, должно быть справедливым равенство

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \alpha).$$

В момент прохождения положения равновесия шарик имеет только центростремительное ускорение, модуль которого равен v^2/L . Поэтому, согласно второму закону Ньютона, модуль F искомой силы натяжения нити можно найти из соотношения

$$\frac{mv^2}{L} = F - mg.$$

Отсюда и из закона сохранения энергии находим

$$F = (3 - 2 \cos \alpha)mg.$$

4. Систему отсчета, связанную со столом и потолком комнаты, будем считать инерциальной, и будем пренебрегать влиянием воздуха на кубик и шарик. Тогда модуль скорости v шарика в момент его удара о кубик можно определить, воспользовавшись законом сохранения механической энергии

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \alpha),$$

где m – масса шарика, g – модуль ускорения свободного падения. В момент удара действующая на кубик со стороны упругого шарика сила, согласно условию задачи, направлена горизонтально и линия ее действия проходит через центр масс кубика. Поэтому после удара кубик будет двигаться поступательно. Считая удар кратковременным (а потому, пренебрегая действием силы трения на кубик со стороны стола во время удара), на основании закона сохранения горизонтальной составляющей импульса системы кубик – шарик можно утверждать, что кинетическая энергия кубика в момент окончания удара будет равна $\frac{1}{2}mv^2$.

После удара кубик движется по столу, преодолевая силу сухого трения скольжения, модуль которой равен $F = \mu mg$. Поэтому искомое расстояние x должно удовлетворять соотношению

$$\mu mgx = \frac{1}{2}mv^2.$$

Следовательно, искомое расстояние равно

$$x = \frac{(1 - \cos \alpha) L}{\mu}.$$

5. Считаем, что труба покоится относительно инерциальной системы отсчета. Поскольку труба гладкая и горизонтальная, то, согласно закону сохранения импульса системы поршни – газ, скорость центра масс $\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ (или $|v_{\text{цм}}| = \frac{1}{2}|v_1 - v_2|$) указанной системы при движении поршней изменяться не может. Давление газа будет максимальным в тот момент, когда поршни сблизятся на минимальное расстояние, т.е. в тот момент, когда скорости обоих поршней станут равными $v_{\text{цм}}$. Поскольку внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа равна $\frac{3}{2}RT$, где R – универсальная газовая постоянная, то, согласно закону сохранения энергии, искомую температуру T газа можно определить из уравнения

$$\frac{3}{2}RT_0 + \frac{1}{2}M(v_1^2 + v_2^2) = \frac{3}{2}RT + Mv_{\text{цм}}^2.$$

Подставив в это соотношение ранее написанное выражение модуля для скорости центра масс, находим

$$T = T_0 + \frac{M(v_1 + v_2)^2}{6R}.$$

6. Давление насыщенных паров воды при $t = 100^\circ\text{C}$ равно нормальному атмосферному давлению $p_a \approx 10^5$ Па. Согласно закону Дальтона и определению относительной влажности, парциальное давление воздуха в цилиндре в исходном состоянии равно

$$p_{\text{в0}} = p_a - \frac{\varphi}{100\%} p_a.$$

Считая, что воздух при заданных условиях подчиняется уравнению Клапейрона – Менделеева, находим парциальное давление воздуха после изотермического сжатия:

$$p_{\text{вк}} = p_a \left(1 - \frac{\varphi}{100\%}\right)^n.$$

Поскольку в исходном состоянии относительная влажность была 80% и объем смеси уменьшили в $n = 2$ раза, в конечном состоянии водяной пар в цилиндре будет насыщенным. Поэтому, пренебрегая объемом сконденсировавшейся воды, давление в

цилиндре должно стать равным

$$p_k = p_a + p_{вк} = p_a \left(1 + n \left(1 - \frac{\Phi}{100\%} \right) \right) \approx 0,14 \text{ МПа} .$$

7. Будем условно считать, что началу цикла соответствует точка 1, в которой абсолютная температура газа по шкале Кельвина равна T_0 , а его давление равно p_0 . Поскольку заданный цикл является циклом теплового двигателя, работа газа за цикл должна быть положительной. Следовательно, согласно заданной диаграмме цикла, давление газа изотермически увеличивают от начального давления p_0 до давления $4p_0$ (точка 2), затем газ изобарически нагревают до температуры $4T_0$ (точка 3), а потом возвращают в начальное состояние. При этом все изменения состояния газа происходят квазиравновесно, так как температуры и давления во всех точках объема газа одинаковы.

На участке 1-2 внутренняя энергия газа остается неизменной, а его давление увеличивается. Значит, над газом совершают работу. При этом газ передает холодильнику количество теплоты, равное совершенной над ним работе. Поскольку процесс осуществляется квазиравновесно, то при столь малом уменьшении объема газа dV , что его давление можно считать постоянным и равным p , совершенная над газом работа будет равна

$$dA = p dV .$$

Учитывая, что уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$pV = \nu RT ,$$

где ν – число молей газа, а R – универсальная газовая постоянная, вычисляем количество теплоты Q_{x1} , которое газ отдает холодильнику на участке 1-2:

$$Q_{x1} = \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{\nu RT_0}{V} dV = \nu RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = \nu RT_0 \ln 4 .$$

На участке 2-3 газ расширяется изобарически. Как известно, молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при таком процессе равна $\frac{5}{2}R$. Следовательно, на этом участке газ получает от нагревателя количество теплоты

$$Q_n = \frac{5}{2} \nu R (4T_0 - T_0) = \frac{15}{2} \nu RT_0 .$$

На участке 3-1 давление газа убывает прямо пропорционально его температуре. Следовательно, на этом участке объем газа

остается неизменным, а внутренняя энергия газа уменьшается за счет того, что газ отдает холодильнику количество теплоты

$$Q_{x2} = \frac{3}{2} \nu R (4T_0 - T_0) = \frac{9}{2} \nu R T_0,$$

так как молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при таком процессе равна $\frac{3}{2} R$.

По определению, КПД теплового двигателя, пренебрегая потерями энергии в нем, равен отношению совершенной за цикл газом работы к полученному газом при этом количеству теплоты. Согласно закону сохранения энергии, совершенная газом за цикл работа равна

$$A = Q_H - Q_{x1} - Q_{x2}.$$

Следовательно, искомый КПД равен

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_{x1} - Q_{x2}}{Q_H} = \frac{3 - \ln 4}{15/2} \approx 0,215 = 21,5\%.$$

8. Поскольку лампы горят нормальным накалом, напряжения на них равны номинальным, а падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника равно

$$U = \mathcal{E} - U_1 - U_2.$$

Следовательно, через источник течет ток

$$I = \frac{U}{r}.$$

Учитывая, что

$$I = I_{R_1} + I_{L_1} = I_{R_2} + I_{L_2},$$

где I_{R_i} – сила тока, протекающего через резистор сопротивлением R_i , а $I_{L_i} = P_i/U_i$ – сила тока, протекающего через лампу L_i , из приведенных соотношений находим искомые сопротивления резисторов:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_{R_1}} = \frac{U_1^2}{U_1(\mathcal{E} - U_1 - U_2) - P_1 r} = 50 \text{ Ом},$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_{R_2}} = \frac{U_2^2}{U_2(\mathcal{E} - U_1 - U_2) - P_2 r} = 226,8 \text{ Ом}.$$

9. Через достаточно большой промежуток времени после замыкания ключа K конденсатор емкостью C полностью зарядится, а через резистор сопротивлением $2R$, согласно закону

Она для замкнутой цепи, будет протекать ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{3R + r}.$$

Поэтому напряжение между обкладками конденсатора установится равным

$$U_0 = 2RI.$$

После размыкания ключа K напряжение между обкладками конденсатора C начнет увеличиваться и по истечении достаточного промежутка времени станет равным \mathcal{E} . Следовательно, через источник протечет заряд

$$\Delta q = (\mathcal{E} - U_0)C,$$

а сторонние силы в источнике совершат работу

$$A = \mathcal{E}\Delta q.$$

При этом энергия электростатического поля в конденсаторе увеличится на

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{(\Delta q)^2}{C}.$$

Из сказанного и из закона сохранения энергии следует, что после размыкания ключа в схеме должно выделяться количество теплоты

$$Q = A - \Delta W,$$

так как по условию задачи излучением следует пренебречь.

Поскольку через источник и резистор сопротивлением R при разомкнутом ключе в каждый момент времени текут одинаковые токи, выделившееся в этом резисторе количество теплоты будет равно

$$Q_R = \frac{QR}{R+r} = \frac{(R+r)RC\mathcal{E}^2}{2(3R+r)^2}.$$

10. К моменту замыкания ключа K_2 заряд каждого из конденсаторов схемы станет равным

$$q = \frac{\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

После замыкания ключа K_2 заряд конденсатора C_1 установится равным $q_1 = \mathcal{E}C_1$, а конденсатор емкостью C_2 полностью разрядится. При этом через источник протечет заряд

$$\Delta q = q_1 - q = \frac{\mathcal{E}C_1^2}{C_1 + C_2}.$$

Следовательно, за время перезарядки конденсаторов сторонние силы в источнике совершат работу

$$A = \mathcal{E} \Delta q .$$

Поскольку к моменту замыкания ключа K_2 энергия электростатического поля конденсаторов равна

$$W_0 = \frac{1}{2} \mathcal{E} q ,$$

а после перезарядки она стала

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E} q_1 ,$$

то, согласно закону сохранения энергии, максимальное количество теплоты, которое могло выделяться в схеме после замыкания ключа K_2 , равно

$$Q = A + (W_0 - W_1) = \frac{(\mathcal{E} C_1)^2}{2(C_1 + C_2)} .$$

11. Поскольку сопротивление рамки достаточно велико, магнитным полем, возникающим за счет протекания тока в рамке, можно пренебречь. Поэтому магнитный поток, сцепленный с рамкой при ее вращении с угловой скоростью ω вокруг одной из ее сторон, будет изменяться со временем t по закону

$$\Phi = Ba^2 \cos \omega t ,$$

так как при $t = 0$ плоскость рамки была перпендикулярна индукции магнитного поля. По закону электромагнитной индукции амплитуда ЭДС, возникающей в рамке, равна

$$\mathcal{E} = (\Phi')_{\max} = Ba^2 \omega .$$

Следовательно, искомая угловая скорость вращения равна

$$\omega = \frac{\mathcal{E}}{Ba^2}$$

12. По условию задачи изображение палочки действительное. Следовательно, линза собирающая, а расстояние d от палочки до главной плоскости линзы больше фокусного расстояния F линзы. Если расстояние от главной плоскости линзы до изображения палочки обозначить f , то, согласно условию задачи,

$$d + f = l .$$

Учитывая, что поперечное увеличение линзы k в принятых

обозначениях равно f/d , из сказанного следует, что

$$d = \frac{l}{1+k}, \text{ а } f = \frac{kl}{1+k}.$$

Согласно формуле тонкой линзы,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1+k}{l} + \frac{1+k}{kl} = \frac{(1+k)^2}{kl}.$$

Следовательно, фокусное расстояние линзы равно

$$F = \frac{kl}{(1+k)^2}.$$

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2009»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6.

Обозначим неизвестные числа через x и y , тогда из условия задачи получим

$$\begin{cases} x+y=4\sqrt{3}, \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow |x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4^2 \cdot 3 - 4 \cdot 3} = 6.$$

2. 70.

Если m_1 г и m_2 г – масса свежих и сушеных грибов соответственно, а x г – масса сухого вещества (неизменная), то доля сухого вещества в свежих и сушеных грибах колеблется соответственно в пределах

$$0,10 = 1 - 0,90 \leq \frac{x}{m_1} \leq 1 - 0,99 = 0,01,$$

$$0,70 = 1 - 0,30 \leq \frac{x}{m_2} \leq 1 - 0,45 = 0,55.$$

Поэтому наибольшее количество раз, в которое уменьшается масса грибов, равно

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\frac{x}{m_2}}{\frac{x}{m_1}} = \frac{0,70}{0,01} = 70.$$

3. $x = a - 1$, $\frac{1}{a-1}$ при $a > 1$; решений нет при $a \leq 1$.

$$\begin{aligned} \log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) &= \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{ax}, \\ a > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{x} - a = \frac{(x+1)^2}{ax}, \\ \frac{(x+1)^2}{x}, a > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x, a > 0, \\ (a-1)(x+1)^2 = a^2 x. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad &\begin{cases} a = 1, \\ x > 0, \Leftrightarrow x \in \emptyset, \\ 0 = x; \end{cases} \\ 2) \quad &\begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x > 0, \\ \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{a^2}{a-1} \quad (\Leftrightarrow x^2 + px + 1 = 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-1, \frac{1}{a-1}, \\ a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(так как корень $x_1 = a - 1$ угадывается, а по теореме Виета имеем $x_1 \cdot x_2 = 1$, откуда $x_2 = \frac{1}{a-1}$).

4. Да.

Сначала возьмем сечение двугранного угла, перпендикулярное его ребру, — тогда угол между двумя лучами в этом сечении будет равен 90° . Затем будем поворачивать плоскость сечения

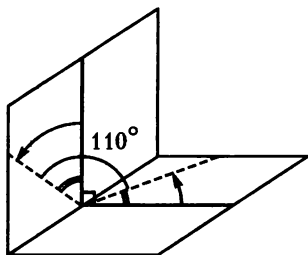


Рис. 26

так, чтобы лучи в сечении расходились на одинаковые углы, причем в разные стороны (рис.26) — тогда угол в сечении устремится к 180° . Значит, где-то в процессе вращения (по непрерывности) угол между лучами примет любое промежуточное значение, в частности, 110° .

5. 2; 6.

Обозначим через $d = (m, n)$ наибольший общий делитель чисел m и

n , тогда получим:

$$1) (m+6, n) = 4d \Rightarrow \begin{cases} m+6:2, \\ n:2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m:2, \\ n:2 \end{cases} \Rightarrow d:2;$$

$$2) \begin{cases} m:d, \\ m+6:d \end{cases} \Rightarrow 6:d \Rightarrow d=2; 6 \text{ (так как } d - \text{ четно);}$$

3) оба найденных значения d реализуются:

$$a) \begin{cases} m=2, \\ n=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = (2, 8) = 2, \\ (m+6, n) = (2+6, 8) = 4 \cdot 2; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} m=18, \\ n=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = (18, 24) = 6, \\ (m+6, n) = (18+6, 24) = 4 \cdot 6. \end{cases}$$

6. 1.

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2| \Leftrightarrow \sin x = \left| \cos x + \frac{2}{5} \right| - \frac{4}{5}.$$

Если с последним уравнением связать функцию

$$s = f(c) \equiv \left| c + \frac{2}{5} \right| - \frac{4}{5}, \text{ где } s = \sin x, c = \cos x,$$

то число его корней $x \in [0; \pi]$ будет равно числу точек пересечения графика этой функции (рис.27) с дугой $[0; \pi]$ тригонометрической окружности, т.е. с верхней полуокружностью. Такая точка – ровно одна, так как

$$f(-1) = -\frac{1}{5} < 0, f(0) = -\frac{2}{5}, \\ f(1) > 0.$$

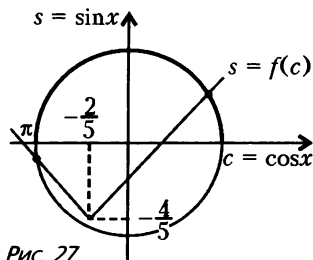


Рис. 27

7. 13.

Докажем, что $BCGF$ – прямоугольник (откуда будет следовать равенство $BG^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$). Действительно, пусть KL , BM и CN – касательные к окружностям в точках A , B и C соответственно (рис.28), тогда по теоремам о вписанных углах и об угле между касательной и хордой получим:

1) $\angle ABE = \frac{1}{2} \widehat{AE} = \angle EAK = \angle CAL = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle ADC$, поэтому $BE \parallel CD$ и $\angle CBE + \angle BCD = 180^\circ$;

2) $\angle BCN = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \angle CBM$, $\angle ACN = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle CAL = \angle ABE$ и, аналогично, $\angle ABM = \angle ACD$, поэтому $\angle EBC = \angle DCB = 90^\circ$;

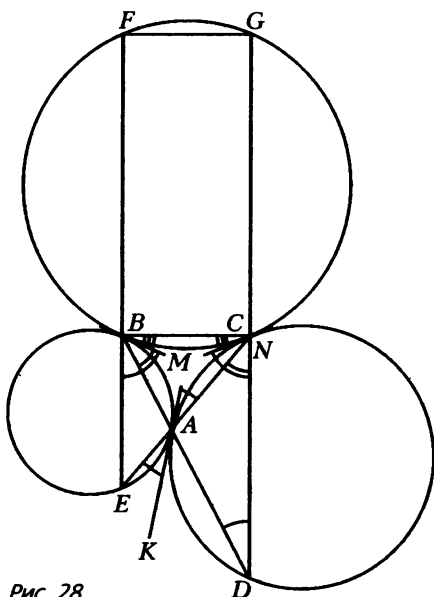


Рис. 28

3) $\angle BFC = 180^\circ - \angle BCG = 90^\circ$.

Замечание. Можно доказать (хотя для решения данной задачи этого не потребовалось), что все три упомянутые в решении касательные пересекаются в одной точке.

8. а) Да; б) 72.

а) Пусть стрелка, начав движение в точке 15, движется на $\frac{1}{2}$ мин вперед и на $\frac{1}{2}$ мин назад (возвратившись в точку 15), затем на $\frac{1}{4}$ мин вперед и на $\frac{1}{4}$ мин назад, затем на $\frac{1}{8}$ мин вперед и на $\frac{1}{8}$ мин назад и т.д. Тогда в результате этих колебаний она побывает бесконечно много раз в точке 15 в течение

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \text{ мин.}$$

После этого, перейдя за полчаса из точки 15 в точку 45 и, проделав в ней в течение 2 мин аналогичные колебания, она всего за 34 мин выполнит поставленную перед ней задачу.

б) С одной стороны, за трое суток стрелка, двигаясь в одном направлении, может сделать $3 \cdot 24 = 72$ оборота, показав каждое из чисел ровно по 72 раза. С другой стороны, если бы при некотором движении стрелки самое редкое показание встрети-

лось 73 раза, то остальные показания – также не меньше 73 раз, а тогда полная угловая длина пути стрелки за эти трое суток была бы не меньше 73 оборотов, что невозможно.

9. $-3 < x < 0$, $x > 3$, а y – любое.

Если $|u| > |v|$, то

$$u > 0 \Leftrightarrow u > v,$$

если $|u| < |v|$, то

$$0 > v \Leftrightarrow u > v,$$

а если $|u| = |v|$, то

$$u > 0 > v \Leftrightarrow u > v.$$

Поэтому одновременное выполнение всех трех высказываний задачи равносильно следующему:

$$\begin{cases} |u| > |v|, \\ u > 0, \\ |u| < |v|, \\ 0 > v, \\ |u| = |v|, \\ u > 0 > v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |u| > |v|, \\ u > v, \\ |u| < |v|, \\ u > v, \\ |u| = |v|, \\ u > v \end{cases} \Leftrightarrow u > v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4 + x^3 - 9x} > 2 \Leftrightarrow 4 + x^3 - 9x > 4$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 0, \\ x > 3. \end{cases}$$

Замечание. Тот же результат можно получить графически, если отдельно для каждой из трех систем рассматриваемой совокупности изобразить на координатной плоскости множество точек $(u; v)$, удовлетворяющих этой системе, а затем взять объединение всех трех построенных множеств.

ФИЗИКА

Задачи

$$1. a = \sqrt{4a_u^2 + \left(\frac{v_u^2}{R}\right)^2}. \quad 2. a = \frac{2m - M}{5M + 4m} g. \quad 3. l = \frac{3R}{4\mu} = 50 \text{ м.}$$

$$4. h = \frac{(v-u)^2}{2g}. \quad 5. \frac{2m}{LS} > \rho > \frac{m}{2LS}. \quad 6. T = 4\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

$$7. T_0 = \frac{Q}{2(n^2 - 1)\nu R}. \quad 8. \Delta h = \frac{MT_1}{mT_2} H = 60 \text{ см.}$$

$$9. \eta = \frac{\alpha - \beta V_1}{5\alpha + 3\beta V_1}.$$

$$10. p_n = \frac{pM_B V - mR(t + 273)}{(M_B - M_n)\phi V} \approx 3,52 \text{ кПа.}$$

$$11. v_{\min} = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m l}} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$12. L_{\min} = \frac{1}{2} L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\epsilon_0 B^2 L^3}} \right).$$

$$13. Q_2 = Q_1 \frac{I_2^2 t_1}{I_1^2 t_2} = 6 \text{ Дж.} \quad 14. P_{\text{ср}} = \frac{RC}{2L} U_0^2 = 0,1 \text{ Вт.}$$

$$15. F = 2 \frac{P}{c} \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}, \text{ где } c - \text{ скорость света.}$$

16. Действительное изображение источника удаляется от линзы под малым углом $\beta = \left(\frac{c}{F} - 1 \right) \alpha$ к ее главной оптической оси со скоростью, модуль которой равен $u \approx \frac{vF^2}{(a - F)^2}.$

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

МАТЕМАТИКА

Олимпиада

/ тур

1. 7. 2. 2. 3. 4. 4. 4. 5. 542. 6. 5. 7. 18. 8. 4. 9. 5. 10. 5. 11. 84. 12. 1. 13. 11. 14. 15. 15. 72. 16. 100. 17. 19. 18. 1200. 19. 100. 20. 600.

// тур

1. На 21%.

Во-первых, заметим, что множители, меньшие 10, нельзя увеличить в соответствии с условием задачи так, чтобы они остались целыми. Во-вторых, обратим внимание на то, что в

разложении трехзначного числа на множители не может быть более двух множителей, не меньших 10. Таким образом, исходное число может увеличиться не более чем в $\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$ раз, т.е. на 21%. Осталось лишь проверить существование такого числа. Простейший пример нам дает разложение $100 = 10 \cdot 10$.

2. Предположим, что Васино число все же разделилось на Колино. Тогда частное не меньше 2 и не больше 7. Но это противоречит тому, что оба числа дают остаток $1 + 2 + \dots + 7 = 28 \equiv 1 \pmod{9}$ при делении на 9.

3. 96.

Заметим, что маршрут можно переставить по циклу так, чтобы он начинался с любой из улиц. Поэтому (число маршрутов) = (число улиц) \times (число маршрутов, начинающихся с фиксированной улицы). Более того, так как направление любого маршрута можно обратить – и получить новый маршрут, – (число маршрутов) = $2 \times$ (число улиц) \times (число маршрутов, начинающихся с прохода по фиксированной улице в фиксированном направлении).

Найдем число маршрутов, начинающихся с прохода верхней стороны квадрата слева направо (рис.29): следующей после нее может идти любая из трех улиц, затем маршрут с неизбежностью приведет нас на начальный перекресток, после чего мы снова предстанем перед тем же выбором, но вариантов останется только два, и дальше маршрут уже будет определен однозначно, т.е. таких маршрутов $3 \cdot 2 = 6$, а всего маршрутов $2 \cdot 8 \cdot 6 = 96$.

4. а) Подходит, например, $p = 1$, $q = 0$ ($a = -0,5$, $b = -0,2$, $c = 0$).

б) Поскольку $a < b < c$ и $R(a) < R(b) < R(c)$, точка b лежит справа от вершины параболы. Действительно, иначе a лежит левее вершины и на отрезке $[a; b]$ функция R убывает.

Обозначим теперь через c_1 и $c_2 \geq c_1$ абсциссы точек пересечения параболы с прямой $y = x$. Ясно, что $c = c_1$ или $c = c_2$. Поскольку $R(b) > b$, точка b может лежать либо на луче $(-\infty; c_1]$, либо на луче $[c_2; +\infty)$, но во втором случае $b \geq c$, что противоречит условию задачи. Итак, $b \leq c_1$, а значит, вершина параболы лежит выше прямой $y = x$.

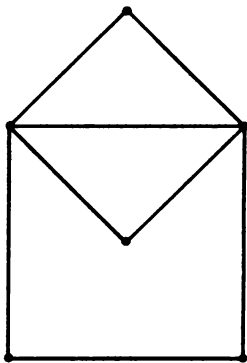


Рис. 29

Осталось доказать, что у параболы $y = x^2 + px + q$ с вершиной выше прямой $y = x$, имеющей общую точку с этой прямой, коэффициент p нечетен. Это можно сделать как минимум двумя способами.

Способ 1 (геометрический). Если $p = 2k$ четно, то сделаем параллельный перенос параболы на вектор $(-k; -k)$. В результате получим параболу вида $R_1(x) = x^2 + q_1$. Но при $q_1 \leq 0$ вершина этой параболы не лежит выше прямой $y = x$, а при $q_1 > 0$ она не имеет общих точек с этой прямой.

Способ 2 (алгебраический). Запишем условия:

$$R(-p/2) > -p/2 \quad (\text{вершина выше прямой } y = x);$$

$$(p-1)^2 - 4q \geq 0 \quad (\text{уравнение } R(x) = x \text{ имеет корень}),$$

т.е.

$$p^2 - 2p - 4q < 0;$$

$$p^2 - 2p - 4q + 1 \geq 0.$$

Все числа целые, поэтому $(p-1)^2 - 4q = 0$, $(p-1)^2 = 4q$, $p-1$ четно, p нечетно.

5. Нет, не может. Пусть r – радиус вписанной окружности, R – описанной. Расстояние между их центрами в условиях задачи равно r . С другой стороны, по формуле Эйлера это расстояние равно $\sqrt{R^2 - 2Rr}$. Получаем $r = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, откуда $R = r(1 + \sqrt{2})$. Пусть l – расстояние от вершины треугольника при угле в 30° до центра вписанной окружности; тогда угол равен $2\arcsin(r/l)$. Поскольку $l \leq r + R$, угол не меньше $\varphi = 2\arcsin\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)$. Имеем $\cos \varphi = 1 - 2\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{2} - 2$, откуда $\cos^2 \varphi = 12 - 8\sqrt{2}$. Нетрудно проверить, что $\cos^2 \varphi < 3/4$ (поскольку $\sqrt{2} > 45/32$), откуда $\varphi > 30^\circ$.

6. а) Заметим, что окружность большого круга, проходящая через середины двух последовательных звеньев маршрута марсохода, проходит через середины всех остальных звеньев. Будем далее называть эту окружность экватором. Теперь очевидно, что число звеньев четно, по половине из них марсоход проходит из северного полушария в южное, а по другой половине – наоборот, из южного в северное, а точки поворота (и начала движения) характеризуются тем, что они наиболее удалены от плоскости экватора. Следовательно, в начальную точку марсоход может попасть только в момент четного поворота.

б) Заметим, что поскольку угол поворота $\alpha \geq \pi/2$, угол между двумя плоскостями, содержащими два смежных звена, равен $\pi - \alpha$, т.е. является острым или прямым углом. Следовательно, дуга экватора, высекаемая двумя последовательными звеньями, составляет не более $\pi/2$. Обозначим угловую меру этой дуги через β . Для того чтобы марсоход рано или поздно вернулся в исходную точку, необходимо и достаточно, чтобы $\beta \cdot 2N = 2\pi M$, где $2N$ – это число звеньев в маршруте, а M – число обходов вокруг экватора, причем если возвращение произошло впервые, то числа N и M не должны иметь общего делителя.

Если k -е звено маршрута пересекло его l -е звено, то, очевидно, и $(k + 1)$ -е звено маршрута пересечет его $(l + 1)$ -е звено, а $(k - 1)$ -е – соответственно $(l - 1)$ -е, так что точки самопересечения будут тогда на каждом звене, поэтому число точек самопересечения не меньше $2N/2 = N$. Таким образом, требуется найти наименьшее число N такое, что $\beta = \pi M/N < \pi/2$, при том, что $M > 1$ (иначе самопересечений вообще не будет). Следовательно, $N \geq 5$, причем значение 5, как нетрудно проверить, подходит.

$$\text{в) } 10R \arcsin\left(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{5}\right).$$

Осталось вычислить значение α , соответствующее $\beta = 2\pi/5$. Обозначим центр шара через O , точки пересечения двух последовательных звеньев через A и B , общую точку этих двух звеньев через C . Тогда хорда $AB = 2R \sin \pi/5$, а перпендикуляры AD и BD на радиус OC равны и образуют угол $\pi - \alpha$. Для того чтобы полный путь был наименьшим, необходимо, чтобы наименьшим был $\angle COA$, синус которого пропорционален длине AD (или BD), а эта длина будет минимальной при максимально возможном угле $\pi - \alpha$, т.е. при $\alpha = \pi/2$. В этом случае треугольник ADB прямоугольный равнобедренный, поэтому $AD = BD = R\sqrt{2} \sin \pi/5$, так что $\angle COA = \arcsin(\sqrt{2} \sin \pi/5)$, а весь путь из 5 звеньев равен $10R \arcsin(\sqrt{2} \sin \pi/5)$.

Устный экзамен

1. 192.

Наибольшее из чисел, стоящих в углах квадрата, не меньше 4. В противоположном углу стоит число, не меньшее 1. Следовательно, в центре – число, не большее 3. Но тогда максимальное число в углу – по крайней мере 5, и мы получаем, что в центре 1 или 2. Если в центре 2, то обе суммы чисел в противоположных углах должны равняться 6, но из оставшихся чисел такую сумму

дают только 1 и 5. Следовательно, в центре квадрата стоит 1, а суммы чисел в противоположных углах равны 7, т.е. по одной диагонали в углах стоят 2 и 5, а по другой – 3 и 4. Таким образом, в левый верхний угол мы можем поставить одно из четырех чисел, после этого в правый верхний – одно из двух, остальные углы заполняются однозначно. Оставшиеся четыре числа произвольно расставляем в оставшихся четырех клетках. Число способов равно $4 \times 2 \times 4! = 8 \times 24 = 192$.

2. Четырехугольник с вершинами $(-1; -2)$, $(0; -2)$, $(1; -2)$ и $(0; -4)$; площадь равна 3.

Множество зеленых точек – это образ квадрата $1 \leq t_1 \leq 2$, $-2 \leq t_2 \leq -1$ при отображении $(t_1, t_2) \mapsto (p, q) = (-(t_1 + t_2), t_1 t_2)$; поскольку $t_1 + t_2$ меняется в пределах $[-1, 1]$ и при фиксированной сумме $t_1 + t_2 = -p$ произведение $q = t_1 t_2$ пробегает множество значений функции $f(s) = -s(s + p)$ (при $s \in [1; 2 - p]$ для $p \geq 0$ и при $s \in [1 - p; 2]$ для $p \leq 0$), мы получаем четырехугольник с вершинами $(0; -4)$, $(-2; -2)$, $(0; -1)$ и $(1; -2)$. Его площадь, очевидно, равна 3.

3. Рассмотрим случай остроугольного треугольника ABC . Пусть B' – основание высоты, опущенной на сторону AC , а A' – на сторону CB . При этом сами высоты пересекаются в точке O . Прямоугольные треугольники $BB'C$ и $AA'C$ подобны, поэтому $A'C/CA = B'C/BC$. Следовательно, треугольник $A'B'C$ подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия $A'C/AC$. С другой стороны, диаметр окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C$, равен $OC = R$. Значит, коэффициент подобия равен $1/2$, и рассматривая прямоугольный треугольник $AA'C$, получаем, что угол $\angle C = \pi/3$. Случай тупоугольного треугольника рассматривается аналогично.

Набросок другого решения.

Зафиксируем отрезок AB и окружность γ , описанную около треугольника ABC . Когда точка C пробегает эту окружность, точка пересечения высот треугольника ABC пробегает окружность γ' , симметричную γ относительно прямой AB (это легко доказать, рассматривая вписанные углы), причем точка пересечения высот получается из C сдвигом на вектор, соединяющий центры окружностей γ и γ' . Поэтому длина этого вектора равна радиусу γ , т.е. угол C равен $\pi/3$ или $2\pi/3$.

4. Минимальная длина общей касательной равна 6, а максимальная – 8.

Рассмотрим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{O_1 K_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{K_1 K_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{K_2 O_2}$, $\vec{d} = \overrightarrow{O_1 O_2}$. Ясно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. Следовательно,

$\vec{d}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{c})$. Но (\vec{a}, \vec{c}) принимает максимальное значение, равное 7, когда векторы \vec{a} и \vec{c} коллинеарны и сонаправлены, а минимальное значение, равное -7 , когда они коллинеарны, но смотрят в разные стороны. Следовательно, минимальное значение \vec{b}^2 равно $10^2 - (7+1)^2 = 36$, а максимальное — равно $10^2 - (7-1)^2 = 64$.

Нетрудно привести пример касательных длины 6 и длины 8.

5. $a = 0, b = 0, c = 0$; $a = 1, b = 0, c = \pm 1$; $a = 1, b = \pm 1, c = 0$.

Предположим, что $cb \neq 0$. Тогда из второго равенства следует, что $a > 1$. Одновременно, из первого равенства следует, что $a^2 > b^2$, $a^2 > c^2$. Противоречие, так как $a^3 = aa^2 \geq 2a^2 > c^2 + b^2$. В силу симметрии можно считать, что $b = 0$. Тогда $a = 1, c = \pm 1$ или $a = 0, c = 0$.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 9 ч. 2. $\pm \arccos \frac{1-\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 3. $\left[-\frac{9}{8}; 2\right]$.
4. $\frac{l^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$. 5. $\{3; 3\sqrt{3}\}$. 6. $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Вариант 2

1. 8 ч. 2. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. 3. $\left[-\frac{169}{48}; 4\right]$.
4. $\frac{r}{\sqrt{2} \cos \alpha - 1}$. 5. $\{3; 3\sqrt{3}\}$. 6. $[-1; 0) \cup (2; 6]$.

Вариант 3

1. $(3; 15]$. 2. $\frac{6}{7}$ ч. 3. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{3}{16} \pi b^2$. 5. $\left\{\frac{5}{2}; \frac{26}{9}\right\}$. 6. $\frac{5\pi}{4}$.

Вариант 4

1. $(2; 8]$. 2. $\frac{12}{5}$ ч. 3. $(-1)^n \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{a \sin \alpha}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$. 5. $\{1; 7\}$. 6. $\frac{3\pi}{2}$.

Вариант 5

1. Верно. 2. 36^2 . 3. $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \cup (2\pi; 7)$.

4. $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$. 5. $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; +\infty\right)$.

6. Можно.

7. Достаточно рассмотреть прямые, задаваемые уравнением с угловым коэффициентом $y = ax$, где $a > 0$. Если число a рационально, т.е. $a = \frac{n}{m}$, то данная прямая проходит через целочисленную точку с координатами $(m; n)$.

Далее рассмотрим случай иррационального a . Пусть x пробегает множество значений $\{1, 2, \dots, 10^6 + 1\}$. Обозначим

$$y_i = ai = b^{(i)} c_1^{(i)} c_2^{(i)} c_3^{(i)} c_4^{(i)} c_5^{(i)} c_6^{(i)} c_7^{(i)} \dots$$

разложение числа y_i в бесконечную десятичную дробь, где $1 \leq i \leq 10^6 + 1$. Здесь $b^{(i)} \in \mathbb{Z}$, $c_j^{(i)} \in \{0, \dots, 9\}$.

Нетрудно заметить, что среди чисел y_i существуют два числа, у которых первые шесть цифр в дробной части совпадают. Пусть это числа y_k, y_t , где $1 \leq k < t \leq 10^6 + 1$:

$$y_k = b^{(k)}, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 + \delta_k,$$

$$y_t = b^{(t)}, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 + \delta_t,$$

причем $0 < \delta_k < 10^{-6}$, $0 < \delta_t < 10^{-6}$. Тогда

$$y_t - y_k = a(t - k) = (b^{(t)} - b^{(k)}) + (\delta_t - \delta_k),$$

где $-10^{-6} < \delta_t - \delta_k < 10^{-6}$.

Полученное равенство означает, что точка прямой, соответствующая абсциссе $k - t$, находится от целочисленной точки с координатами $(t - k; b^{(t)} - b^{(k)})$ на расстоянии меньшем, чем 10^{-6} .

Последнее означает, что прямая пересекает окружность с центром $(t - k; b^{(t)} - b^{(k)})$.

Вариант 6

1. Делится. 2. А) 14 секунд; В) 23 секунды.

3. Ключевое слово: КРЫША

Сообщение:

В Е Р Б Л Ю Д Ы И Д У Т Н А С Е В Е Р В Е Р Б Л Ю Д Ы И Д У Т Н
А С Е В Е Р.

4. Последовательность состоит из цифр от 0 до 9. Так как число четверок (a,b,c,d) таких цифр конечно (и равно 10000), то в последовательности рано или поздно встретятся две повторяющиеся четверки. Пусть они встретились на i -м и j -м месте, $0 \leq i \leq j$. Если $i = 0$, то все доказано. Пусть $i > 0$. (Сейчас доказано, что последовательность периодическая. Но нужно еще доказать, что она чисто периодическая.)

Закон рекурсии:

$$u_{i+4} = r_{10} (u_{i+3} + u_{i+2} + u_{i+1} + u_i), \quad (*)$$

где r_{10} — остаток от деления на 10. Заметим, что по заданным четырем членам последовательности можно однозначно восстановить предыдущий член. Другими словами, если u_{i+4} , u_{i+3} , u_{i+2} , u_{i+1} известны, то существует единственное u_i , для которого выполняется рекуррентное соотношение (*). Поэтому если в последовательности совпали четверки на местах i и j , то совпадут четверки и на местах $i-1$ и $j-1$, и т.д. Поэтому совпадут четверки на местах 0 и $j-i$, что и требовалось.

5. При $a < -1$ уравнение имеет два решения $x = -1 \pm \sqrt{4-a}$; при $a = -1$ уравнение имеет три решения $x = 0$ и $x = -1 \pm \sqrt{5}$; при $a = 0$ уравнение имеет три решения $x = -1$, $x = -3$, $x = 1$; при $a = 3$ уравнение имеет три решения $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$; при $a = 4$ уравнение имеет три решения $x = -1$, $x = \pm\sqrt{5}$; при $-1 < a < 0$, при $0 < a < 3$ и при $3 < a < 4$ уравнение имеет четыре различных решения $x = -1 \pm \sqrt{4-a}$ и $x = \pm\sqrt{1+a}$; при $a > 4$ уравнение имеет два решения $x = \pm\sqrt{1+a}$.

6. $a = 7$, $b = 2$.

Сообщение:

морозвоевода дозором обходит владенья свои

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады

1. $a = \frac{3}{4}g$.

2. Ускорение направлено вдоль наклонной плоскости вниз и равно $a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{m_1}$.

3.
$$x = h \frac{C_V}{C_V + R} \frac{p - p_0 - mg/S}{p_0 + mg/S} = \frac{3}{5} h \frac{p - p_0 - mg/S}{p_0 + mg/S}, \quad \text{где}$$

$$C_V = \frac{3}{2}R.$$

4. $W = \frac{k(2q_1q_2 + 2q_2q_3 + q_1q_3)}{2a} = 240 \text{ мДж}.$
5. $\varepsilon = \frac{U_2U_3}{U_3 - U_1}.$ 6. $\theta_{\text{нр}} = \arcsin \frac{v}{c} \approx \arcsin 0,67.$
7. $v_2 = \frac{pV}{RT} - v_1 \approx 3,0 \text{ моль}.$

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $v = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 9 \text{ м/с}.$
2. $V = \frac{mv \cos \alpha}{M - m} = 6 \text{ м/с}.$
3. $q = \sqrt{q_m^2 - LCI^2} \approx 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 5,7 \text{ мкКл}.$
4. $n = \frac{1}{(1 - 0,01\eta)(1 - \Delta t/T)} \approx 1,7.$
5. $d = (\Gamma - 1)|F| = 100 \text{ см}.$

Вариант 2

1. $t = s \sqrt{\frac{2}{g(h - \mu \sqrt{s^2 - h^2})}} = 13 \text{ с}.$
2. $V = \frac{v \cos \alpha}{n + 1} = 5 \text{ м/с}.$ 3. $\lambda = \frac{2\pi c q_m}{I_m} \approx 471 \text{ м}.$
4. $\Delta t = T \frac{\delta - \eta}{100 - \eta} \approx 11 \text{ К}.$ 5. $H = \frac{h|F|}{d + |F|} = 6 \text{ см}.$

Вариант 3

1. $x = \frac{m_2 F \cos \alpha}{k(m_1 + m_2)} \approx 0,03 \text{ м}.$
2. $s = \frac{m^2(v_1 - v_2)^2}{2\mu g M^2} \approx 3 \text{ м}.$
3. $R = \frac{Ur}{Ir - U} \approx 20,16 \text{ Ом}.$
4. $Q = c_V \nu M(n - 1)T \approx 11,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$ 5. $F = \frac{nd}{2n - 1} \approx 6,7 \text{ см}.$

Вариант 4

- $k = \frac{m_2 F \cos \alpha}{x(m_1 + m_2)} \approx 35 \text{ Н/м}$.
- $M = \frac{m(v_1 - v_2)}{\sqrt{2g\mu s}} \approx 0,6 \text{ кг}$.
- $I_0 = \frac{I(R+r)}{R} = 3 \text{ А}$.
- $Q = c_p m(n-1)T \approx 1,48 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.
- $b = \frac{al(d-F)}{dF} = 1,5 \text{ см}$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФИЗИКА

Вариант 1

- $H = \frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin \alpha = 30 \text{ м}$.
- $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{a}{g} = 3$.
- $s = \frac{v_0^2}{2\mu g}$.
- $n = \sqrt{\frac{2T_2}{T_1}} = 4$.
- $m = \frac{Q}{c(t_k - t_1) + r(\delta/100\%)} \approx 3,2 \text{ кг}$, где $t_k = 100^\circ \text{C}$.
- $E = \frac{mg}{q} = 100 \text{ В/м}$.
- $r = \frac{\mathcal{E} - U}{I} = 1 \text{ Ом}$.
- $R = \frac{2nU}{(n^2 - 1)Bv_0} = 1,5 \text{ м}$.
- См. рис.30; $f = \frac{d}{dD - 1} = 0,4 \text{ м}$.
- $A = \frac{E}{2} = 4,2 \text{ эВ}$.

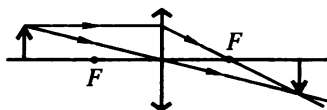


Рис. 30

Вариант 2

- $\frac{a_2}{a_1} = n^2 = 25$.
- $V = \frac{2F}{\rho g} = 10^{-3} \text{ м}^3$.
- $s = \frac{v_0^2}{8\mu g}$.
- $\delta = 1 - \frac{273 + t_1}{273 + t_2} \approx 0,15$.
- $\eta = \frac{\lambda m}{P\tau} \cdot 100\% = 50\%$.

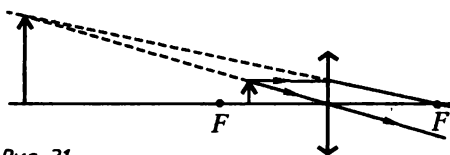


Рис. 31

6. $\frac{E_2}{E_1} = n = 2$. 7. $R = \frac{3r}{16} = 0,75 \text{ Ом}$.

8. $U = \frac{e}{m} \frac{B^2 R^2}{2} = 48 \text{ В}$. 9. См. рис.31; $f = \frac{dF}{F-d} = 1 \text{ м}$.

10. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{A_1}{A_2} \approx 2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 36 и 30 км/ч.

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v-6} - \frac{1}{180}; 180v - 1080 = 180v - v^2 + 6v;$$

$$v^2 - 6v - 1080 = 0; v = 3 \pm \sqrt{1089} = 3 \pm 33; v = 36.$$

2. $(-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{2} \sin x = 0,$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0; \sin x = (1 \pm 3)/4.$$

1) $\sin x = 1 > 0$, посторонний корень. 2) $\sin x = -1/2$,
 $x = (-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. $1/6$.

$$(\log_2(7-6x)) \cdot \log_x(1/2) = 1; \log_2(7-6x) \cdot \frac{\log_2(1/2)}{\log_2 x} = 1;$$

$$\log_2(7-6x) + \log_2 x = 0; 6x^2 - 7x + 1 = 0, x = (7 \pm 5)/12, x_1 = 1$$

– посторонний корень, $x_2 = 1/6$.

4. $(-\infty; -2) \cup (1, 5; 3) \cup (3; +\infty)$.

$$\frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} > \frac{1}{x+2}; \frac{x+3}{x^2 + 3x + 9} > \frac{1}{x+2}, x \neq 3;$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6 - x^2 - 3x - 9}{(x^2 + 3x + 9)(x + 2)} > 0, x \neq 3; \quad \frac{2(x - 1,5)}{x + 2} > 0, x \neq 3.$$

$$5. (-4; -2) \cup \left(-1; -\frac{4}{5}\right).$$

$$\left(\log_2 \frac{5x + 4}{4x}\right) \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{5x + 4}{4x} < 1, \\ (x^2 - 1)(x^2 - 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right) \cup (0; +\infty), \\ \frac{x + 4}{4x} < 0, \\ (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-4; -2) \cup \left(-1; -\frac{4}{5}\right).$$

$$6. E = [-2; -1].$$

$$2 \leq 3 + \cos x \leq 4 \Leftrightarrow \log_{0,5} 4 \leq \log_{0,5} (3 + \cos x) \leq$$

$$\leq \log_{0,5} 2 \Leftrightarrow f(x) \in [-2; -1].$$

$$7. 8\sqrt{3}.$$

$$\triangle BCK \sim \triangle ACK \text{ (рис.32); } \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{AK}; \quad CK^2 = AK \cdot BK.$$

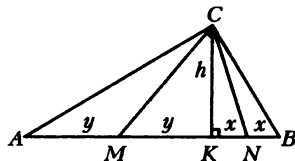


Рис. 32

Положим $CK = h$, $AK = 2y$, $BK = 2x$; тогда $h^2 = 4xy$.

Применяем теорему Пифагора для треугольников CKM и CKN :

$$\begin{cases} x^2 + 4xy = 21, \\ y^2 + 4xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ y^2 + 4xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ 13x^2 - 32xy - 21y^2 = 0; \end{cases}$$

$$13x^2 - 32xy - 21y^2 = 0, \quad 13\frac{x^2}{y^2} - 32\frac{x}{y} - 21 = 0, \quad \frac{x}{y} = 3, \quad x = 3y,$$

$$x = 3, \quad y = 1, \quad h = \sqrt{12}, \quad S_{ABC} = (x + y)h = 8\sqrt{3}.$$

8. Перепишем уравнение относительно неизвестной p : $x^2p^2 - 2xp + x^2 + 2y = 0$; $D/4 = x^2 - x^4 - 2x^2y \geq 0$; область достижимости $x \geq 0$, $0 \leq y \leq (1 - x^2)/2$. В точке $M \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{32} < \frac{1}{4}$. Точка M лежит над границей области достижимости, снаряд не может попасть в нее ни при каком значении p .

$$9. \quad x_{1,2} = 8a \pm 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6} \quad \text{при } a \in [3/5; 1) \cup (3/2; +\infty);$$

$$x_1 = \frac{10a - 6}{a}, \quad x_2 = 8a + 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6} \quad \text{при } 0 < a < 3/5;$$

$$x = 8a + 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6} \quad \text{при } a \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup \{3/2\}.$$

I. При

$$x \geq 0 \quad x^2 - 16ax + 160a - 96 = 0 \quad (*).$$

1. Уравнение (*) имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = 8a \pm 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6}$, если

$$\begin{cases} D/4 = 16(4a^2 - 10a + 6) > 0, \\ a > 0, \\ 160a - 96 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > 3/2, \\ a > 0, \\ a \geq 3/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/5 \leq a < 1, \\ a > 3/2 \end{cases}$$

(рис.33,а)

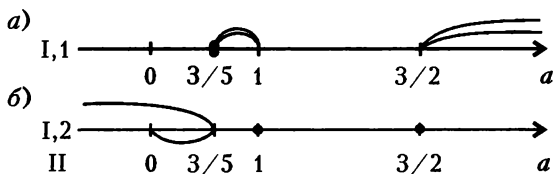


Рис. 33

2. Уравнение (*) имеет один неотрицательный корень $x = 8a + 4\sqrt{4a^2 - 10a + 6}$, если

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 0, \\ a \geq 0, \\ 160a - 96 < 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1, \\ a = 3/2, \\ a < 3/5. \end{array} \right.$$

II. При $x < 0$ $x = \frac{10a - 6}{a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 3/5$. Сравнивая с I, 2 (рис.33,б), замечаем, что при $0 < a < 3/5$ также будет два различных корня уравнения.

$$10. R_{\min} = \frac{9}{4}h.$$

На рисунке 34 изображено сечение призмы и конуса, проходящее через боковое ребро призмы MN и ось конуса. Здесь $MN = h$,

$O_1M = \frac{\sqrt{6}h}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}h$ — радиус окружности, описанной около основания призмы, TA — образующая конуса.

Обозначим: $H = TO_2$ — высота конуса, $O_2A = r$ — радиус основания конуса, $OA = OT = OS = R$ — радиус сферы.

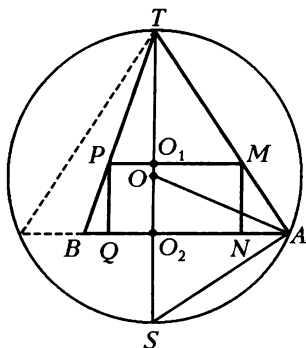


Рис. 34

$$\Delta TO_1M \sim \Delta TO_2A \Rightarrow \frac{TO_1}{TO_2} = \frac{O_1M}{O_2A}, \quad \frac{H-h}{H} = \frac{\sqrt{2}h}{r}, \quad \text{отсюда}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}Hh}{H-h}.$$

$$\text{В } \Delta TAS \quad O_2A^2 = TO_2 \cdot O_2S, \quad \text{или } r^2 = H(2R - H), \quad \text{отсюда}$$

$$2R = H + \frac{2Hh^2}{(H-h)^2}. \quad (2R)' = 1 + 2h^2 \frac{(H-h)^2 - 2(H-h)H}{(H-h)^4} =$$

$$= 1 - 2h^2 \frac{H+h}{(H-h)^3} = 0.$$

$$(H-h)^3 = 2h^2(H+h);$$

$$H^3 - 3hH^2 + h^2H - 3h^3 = 0;$$

$$H^2(H - 3h) + h^2(H - 3h) = 0; \quad (H^2 + h^2)(H - 3h) = 0; \quad H = 3h;$$

$$R_{\min} = \frac{1}{2} \left(3h + \frac{2h^2 \cdot 3h}{4h^2} \right) = \frac{9}{4}h.$$

Вариант 2

1. 100 тыс. рублей.

Пусть x тыс. рублей – закупочная стоимость обуви, проданной в первую неделю, y – стоимость остатка.

$$\begin{cases} x + y = 180, \\ 25x + 16y = 20(x + y); \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 4y, \\ x + 5/4 x = 180; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 80, \\ y = 100. \end{cases}$$

Получено от продажи в первую неделю $80 \cdot 1,25 = 100$ тыс. рублей.

$$2. \quad \frac{\pi}{2} + n\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$|\cos x| + \sin 2x = 0, \quad |\cos x| + 2 \sin x \cos x = 0.$$

$$1) \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi;$$

$$2) \begin{cases} \sin x = -1/2, \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;$$

$$3) \begin{cases} \sin x = 1/2, \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi.$$

Варианты 2), 3) можно объединить: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

3. 1717.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n > 0$, а $a_{n+1} \leq 0$. Так как $a_n = a_1 + d(n-1)$, то из неравенства $100 - 3(n-1) > 0$ найдем $n = [103/3] = 34$.

$$\text{Тогда } \max S_n = S_{34} = 0,5 \cdot (100 + 100 - 3 \cdot 33) \cdot 34 = 1717.$$

4. $1/3$; 9.

$$(\log_3 x) \log_4 (x/3) = \log_2 3; \quad \frac{\log_3 (x/3)}{2 \log_3 2} \log_3 x = \frac{1}{\log_3 2};$$

$$(\log_3 x - 1) \log_3 x = 2; \quad \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0.$$

$$1) \log_3 x = -1, x = 1/3; \quad 2) \log_3 x = 2, x = 9.$$

$$5. \quad [0; 1) \cup (1; 16).$$

$$\frac{\sqrt{x}+4}{1-\sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x}+13}{x-5\sqrt{x}+4}. \text{ Замена } t = \sqrt{x}, t \geq 0.$$

$$\frac{t+4}{1-t} \geq \frac{2t+13}{t^2-5t+4} \Leftrightarrow \frac{t^2+2t-3}{(t-1)(t-4)} \leq 0 \Leftrightarrow t \neq 1, \frac{t+3}{t-4} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$t \in [0; 1) \cup (1; 4).$$

$$6. \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty).$$

$$7. 7\pi.$$

$$S_{ABC} = \frac{49\sqrt{3}}{4}, S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle B = \frac{7}{2} \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 7$$

(рис.35). Значит, треугольник ABC равносторонний, $AK = 2$,

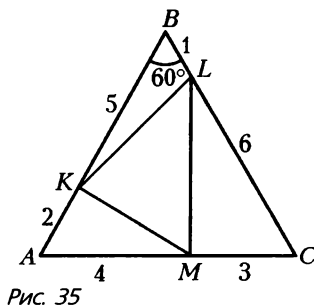


Рис. 35

$$KB = 5, BL = 1, LC = 6, AM = 4, MC = 3.$$

$$S_{KLM} =$$

$$= S_{ABC} \left(1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{7} - \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} \right) = \frac{18}{49} S_{ABC} = \frac{18}{49} \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{KLM} = \frac{KL \cdot ML \cdot KM}{4R},$$

где R – радиус описанной окружности. Тогда

$$R = \frac{KL \cdot ML \cdot KM}{4S_{KLM}} = \frac{KL \cdot ML \cdot KM}{18\sqrt{3}}.$$

Для нахождения KL , ML , KM используем теорему косинусов:

$$KL^2 = 25 + 1 - 5 = 21, \quad ML^2 = 36 + 9 - 18 = 27,$$

$$KM^2 = 4 + 16 - 8 = 12.$$

Площадь описанного круга равна

$$S = \pi R^2 = \pi \frac{21 \cdot 27 \cdot 12}{18 \cdot 18 \cdot 3} = 7\pi.$$

8. 68.

$$y = x^2 + 16, x_1 = -3, x_2 = 1 \text{ (рис.36).}$$

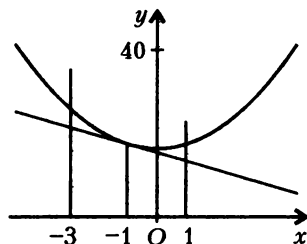


Рис. 36

Уравнение касательной: $y = x_0^2 + 16 + 2x_0(x - x_0)$, или $y = -x_0^2 + 16 + 2x_0x$. $y_1 = y(x_1) = -x_0^2 + 16 + 2x_0(-3)$; $y_2 = y(x_2) = -x_0^2 + 16 + 2x_0 \cdot 1$. Так как

$$\min y_1 = y_1(x_2) = -1 + 16 - 6 = 9 > 0;$$

$$\min y_2 = y_2(x_1) = -9 + 16 - 6 = 1 > 0,$$

полученная фигура – трапеция, площадь которой равна

$$S(x_0) = 0,5(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = (-x_0^2 + 16 - 2x_0) \cdot 4.$$

$$S'(x_0) = 4(-2x_0 - 2) = 0, \quad x_0 = -1.$$

$$\max S(x_0) = S(-1) = 4(-1 + 16 + 2) = 68.$$

9. $x_1 = p + \sqrt{6-p}$, $y_1 = 5$; $x_2 = p + \sqrt{2-p}$, $y_2 = 1$ при $-2 < p \leq 1$;

$$x_1 = 4, y_1 = 5; x_2 = 2, y_2 = 1 \text{ при } p = 2;$$

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{6-p}, y_{1,2} = 5 \text{ при } 2 < p < 6.$$

I. $x < 0$, $y^2 - 6y + 15 = 0$, $D/4 = 9 - 15 < 0$, решений нет.

II. $x > 0$, $y^2 - 6y + 5 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = 1$.

$$1) \quad y = 5, \quad (x-p)^2 = 6-p, \quad x^2 - 2px + p^2 + p - 6 = 0; \quad D/4 = p^2 - p^2 - p + 6 = 6 - p.$$

Два различных корня $x_{1,2} = p \pm \sqrt{6-p}$, если

$$\begin{cases} 6-p > 0, \\ p > 0, \\ p^2 + p - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 6, \\ \begin{cases} p < -3, \\ p > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < p < 6. \end{cases}$$

Один корень $x = p + \sqrt{6-p}$, если

$$\begin{cases} p = 6, \\ p > 0, \\ p^2 + p - 6 < 0, \\ p^2 + p - 6 = 0, \\ p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 6, \\ -3 < p < 2, \\ p = 2. \end{cases}$$

$$2) y = 1, (x-p)^2 = 2-p, x^2 - 2px + p^2 + p - 2 = 0;$$

$$D/4 = p^2 - p^2 - p + 2 = 2-p.$$

Два различных корня $x_{1,2} = p \pm \sqrt{2-p}$, если

$$\begin{cases} 2-p > 0, \\ p > 0, \\ p^2 + p - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 2, \\ \begin{cases} p < -2, \\ p > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < p < 2. \end{cases}$$

Один корень $x = p + \sqrt{2-p}$, если

$$\begin{cases} p = 2, \\ p > 0, \\ p^2 + p - 2 < 0, \\ p^2 + p - 2 = 0, \\ p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2, \\ -2 < p < 1, \\ p = 1. \end{cases}$$

Сопоставляя все найденные решения, выделим значения p , при которых система уравнений имеет ровно два различных решения (рис.37).

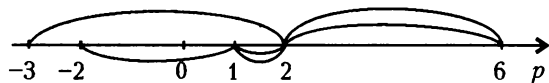


Рис. 37

10. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2$; 3:19.

Пусть $TABC$ – данная пирамида (рис.38), O – центр описанной вокруг нее сферы, K – основание высоты, опущенной

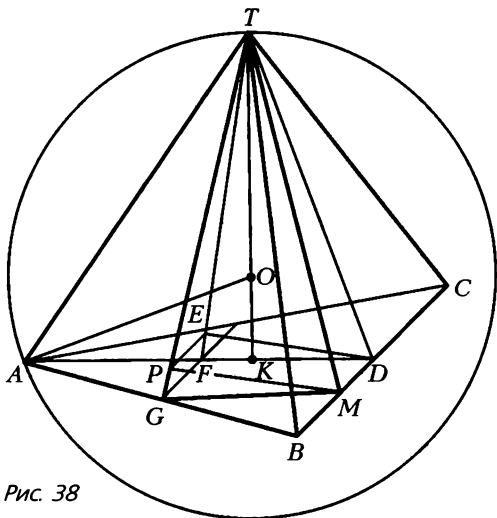


Рис. 38

из вершины T на грань ABC . Тогда $TK = 4R/3$, $OK = R/3$, $BK = \sqrt{1 - (1/3)^2} R = \sqrt{8}R/3$; $AB = AK\sqrt{3} = \sqrt{8/3}R$, $AT = \sqrt{(4R/3)^2 + (\sqrt{8}R/3)^2} = \sqrt{8/3}R$. Следовательно, $AB = AT$, все ребра пирамиды равны.

Будем считать, что секущая плоскость проходит через медиану TG основания ATB и пересекает ребро BC в точке M . Проведем AK и продлим до пересечения с BC в точке D . Проведем $GF \parallel BC$, $F \in AD$, затем $DE \perp TF$, $E \in TF$, $EP \parallel BC$, $P \in TG$, и $PM \parallel DE$, $M \in BC$. PM – общий перпендикуляр к BC и TG .

Обозначим $a = AB = AT$. Тогда

$$FK = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}, \quad TK = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} a,$$

$$FT = \sqrt{KT^2 + KF^2} = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{3}{12 \cdot 12}} a = \frac{\sqrt{11}}{4} a,$$

$$ED = \frac{FD \cdot TK}{FT} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 4}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4R}{\sqrt{33}}.$$

$$S_{\Delta TGM} = \frac{1}{2} \cdot TG \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{11}} R^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}} R^2.$$

$$ET = \sqrt{TD^2 - ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)^2} = \frac{5a}{2\sqrt{11}};$$

$$\frac{ET}{FT} = \frac{5}{2\sqrt{11}} \cdot \frac{4}{\sqrt{11}} = \frac{10}{11};$$

$$PE = MD = \frac{10}{11} GF = \frac{10}{11} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a}{22}; \quad BM = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{22}\right)a = \frac{3}{11}a.$$

$$V_{TBMG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11} V_{TABC} = \frac{3}{22} V_{TABC}.$$

Отношение объемов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду, равно 3:19.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 6 \text{ м/с.}$

2. $F_{\text{тр}} = \mu(mg - F \sin \alpha) = 2 \text{ Н.}$

3. $W_1 = W_2 + Q, \quad W_1 = \frac{W_1}{4} + Q, \quad \frac{3}{4}W_1 = Q, \quad W_1 = \frac{4}{3}Q = 20 \text{ Дж.}$

4. $Q = A.$

5. $Q = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + 2r}\right)^2 R \Delta t.$

6. Из уравнения движения частицы $\frac{mv^2}{r} = qvB$ находим $r = \frac{mv}{qB}$. Таким образом, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2 v_2 q_1}{q_2 m_1 v_1} = \frac{1}{16}.$

7. См. рис.39.

8. Используя принцип суперпозиции, найдем потенциал в точке B:

$$\varphi_B = k \frac{q}{L} + k \frac{q}{L} - k \frac{4q}{2L} = 0.$$

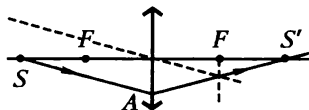


Рис. 39

Тогда искомая работа будет равна

$$A = -q(\varphi_{\infty} - \varphi_B) = 0.$$

$$9. \lambda = \frac{hc}{e\varphi + A} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} (4,28 + 6,07)} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

10. Если брусок массой $3m$ остается неподвижным при смещении на x бруска массой $2m$, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массой $2m$ обращается в ноль):

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + 2\mu mgx,$$

или

$$F = \frac{kx}{2} + 2\mu mg.$$

Условие начала скольжения бруска массой $3m$ имеет вид

$$kx = 3\mu mg.$$

Таким образом,

$$F_{\min} = \frac{3\mu mg}{2} + 2\mu mg = 3,5\mu mg.$$

Вариант 2

1. $M = 2m.$

2. $F = 1 \text{ Н}.$

3. Полная механическая энергия тела во время полета сохраняется, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Для искомой высоты

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mgh.$$

Отсюда находим $h = \frac{v_0^2}{3g}.$

4. $\varphi = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}}.$

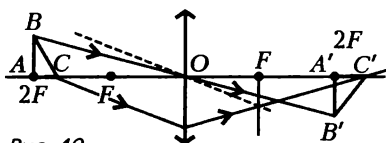


Рис. 40

5. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ увеличится, так как при наличии металлической пластины увеличится емкость конденсатора.

6. См. рис.40.

$$7. \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{h\nu_1}{h\nu_2} = \frac{hc\lambda_2}{hc\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{0,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}} = 4 \cdot 10^3.$$

8. При $p = \text{const}$ работа по сжатию газа равна

$$A = -\nu R \Delta T = \nu R (T_1 - T_2).$$

Так как $p = nkT$, то $n_1 T_1 = T_2 n_2$. Отсюда

$$T_2 = T_1 \frac{n_1}{n_2}.$$

По условию, $\frac{n_2}{n_1} = \alpha$, следовательно, $T_2 = \frac{T_1}{\alpha}$. Окончательно найдем

$$A = \nu R \left(T_1 - \frac{T_1}{\alpha} \right) = \nu R T_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 1246 \text{ Дж}.$$

9. Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке 41:

$$R_{\text{общ}} = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R, \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{3\mathcal{E}}{5R}, \quad I_2 = \frac{1}{3}I_1 = \frac{\mathcal{E}}{5R},$$

$$\Phi_A - \Phi_O = I_2 R + I_1 R = \frac{4}{5}\mathcal{E}, \quad C_{\text{общ}} = \frac{2}{3}C.$$

Следовательно,

$$q = C_{\text{общ}} (\Phi_A - \Phi_O) = \frac{8}{15} \mathcal{E} C.$$

10. При постоянной скорости перемещения перемычки мощность силы тяжести, действующей на перемычку, равна электрической мощности, выделяющейся на сопротивлении:

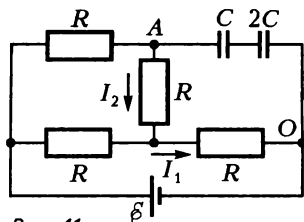


Рис. 41

$$Fv = I^2 R, \text{ или } mg \sin \alpha \cdot v = I^2 R,$$

где

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \quad \mathcal{E}_i = vBL.$$

Окончательно найдем

$$B = \sqrt{\frac{mgR \sin \alpha}{vL^2}}.$$

Вариант 3

1. $p = F_0 t_0.$

2. Плазма – это частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов

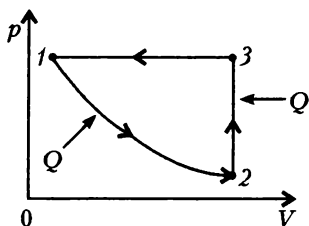


Рис. 42

практически одинаковы. Плазма образуется, например, при электрическом разряде в газах, в процессах горения или взрыва.

$$3. \eta = \frac{A}{A + Q_2} = 0,19 = 19\%.$$

4. См. рис.42; газ получает тепло в процессах 1-2 и 2-3.

$$5. \varphi = k \frac{q}{r}, \quad r = \frac{R}{2} \sqrt{5}, \quad \varphi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{5}} = \frac{q\sqrt{5}}{10\pi\epsilon_0 R}.$$

$$6. {}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0n.$$

7. Скорость света больше в первой среде.

8. Квадрат циклической частоты данной колебательной системы равен

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}.$$

Если бруски колеблются не проскальзывая относительно друг друга, то верхний брусок движется под действием силы трения покоя $F_{\text{тр max}} = \mu \cdot 2mg$. Эта сила создает максимальное ускорение верхнего бруска $a_{\text{max}} = \frac{F_{\text{тр max}}}{2m} = \mu g$, которое равно $a_{\text{max}} = A\omega^2$, т.е. получаем

$$\mu g = A\omega^2.$$

Отсюда находим амплитуду колебаний:

$$A = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu m g}{2k}.$$

$$9. \varphi = \omega \Delta t, \quad \Delta S = \frac{1}{2} L \cdot L \varphi = \frac{1}{2} L^2 \omega \Delta t,$$

$$\Delta \Phi = B \Delta S = \frac{1}{2} B L^2 \omega \Delta t, \quad \epsilon_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{1}{2} B L^2 \omega,$$

$$Q = \frac{\epsilon_i^2}{R} \Delta t = \left(\frac{B L^2 \omega}{2} \right)^2 \frac{\Delta \varphi}{R \omega} = \frac{B^2 L^4 \omega}{4R} \Delta \varphi = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

10. Из соображений симметрии и с учетом законов сохранения импульса и энергии имеем (рис.43)

$$2 \cdot 2mv_1 = mv_2, \quad 2 \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \Delta W_{\text{эл}}, \quad \Delta W_{\text{эл}} = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}},$$

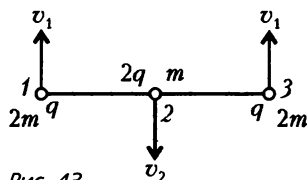


Рис. 43

$$W_{\text{нач}} = W_{12} + W_{13} + W_{23} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = 5 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L},$$

$$W_{\text{кон}} = W'_{12} + W'_{13} + W'_{23} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2L} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{9}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

Отсюда находим

$$v_2 = \frac{q}{\sqrt{5mL\pi\epsilon_0}}.$$

Вариант 4

1. Электроны.

$$2. A = \frac{1}{5} \mu mgL.$$

3. Полная механическая энергия тела во время полета сохраняется, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Для искомой высоты

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{v_0^2}{4g}.$$

$$4. U = \nu C_V T = \nu \cdot \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} pV = 9 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

5. ЭДС индукции, возникающая при вращении стержня, равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} BL^2 \omega.$$

Ток в контуре равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_i}{R}.$$

По закону Джоуля – Ленца в стержне выделится количество

$$Q = I^2 R \Delta t = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2}{R} \frac{\Delta \varphi}{\omega} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2}{R} \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\left(\varepsilon - \frac{1}{2} B L^2 \omega\right)^2}{R} \frac{\pi}{4\omega}.$$

6. Для рассеивающей линзы

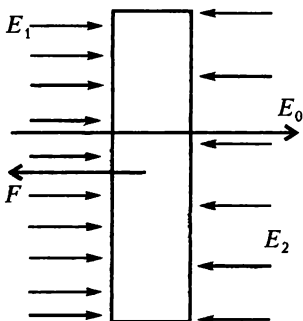
$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f},$$

откуда

$$f = \frac{Fd}{F+d} = 0,1 \text{ м.}$$

7. Цифрой 5.

8. Пусть E_0 и $E_{\text{п}}$ – модули векторов напряженностей внешнего электрического поля и поля заряженной пластины. В соответствии с принципом суперпозиции,



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{п}}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{п}}.$$

Из рисунка 44 следует, что

$$E_1 = E_0 + E_{\text{п}}, \quad -E_2 = E_0 - E_{\text{п}},$$

откуда

$$E_0 = \frac{E_1 - E_2}{2}.$$

Рис. 44

Сила, действующая со стороны внешнего поля на пластину, равна

$$F = qE_0 = q \frac{E_1 - E_2}{2}.$$

Отсюда модуль заряда пластины равен

$$q = \frac{2F}{E_1 - E_2} = 7,0 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

9. На площади диска $S = \frac{\pi D^2}{4}$ записано $N = W \cdot 2^{23}$ бит информации, а значит, на рабочей поверхности диска имеется N углублений. Таким образом, на одно углубление приходится площадь $\Delta S = \frac{S}{N}$. Будем считать, что углубление имеет форму окружности диаметром d . При максимальной плотности записи

этот диаметр должен быть порядка длины волны лазера, т.е.

$$\Delta S = \frac{\pi d^2}{4} \approx \frac{\pi \lambda^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi D^2}{4N} = \frac{\pi D^2}{4W \cdot 2^{23}} \approx \frac{\pi \lambda^2}{4},$$

откуда

$$\lambda \approx \frac{D}{\sqrt{W \cdot 2^{23}}} \approx 1,64 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

10. Из-за разделения зарядов под действием силы Лоренца (рис.45), возникает электрическое поле, напряженность которого равна

$$E = vB.$$

Скорость электронов в ленте

$$v = \frac{j}{en} = \frac{I}{dhen},$$

откуда

$$E = \frac{BI}{dnh e}.$$

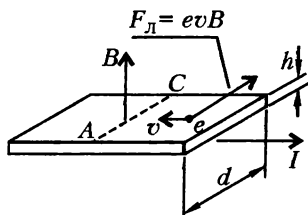


Рис. 45

Искомая разность потенциалов равна

$$\varphi_A - \varphi_C = Ed = \frac{BI}{neh}.$$

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1; $\frac{12 + \sqrt{331}}{17}$. *Указание.* Данные функции имеют смысл

при $f(x) = -17x^2 + 24x + 11 \geq 0$; $(x-1)^2 \leq 1$; $x^2 > 0$. Чтобы минимизировать громоздкие вычисления, учтите, что $f(1) > 0$, $f(2) < 0$.

2. 77. *Указание.* Если Андрей поймал x карасей, то у Бориса карасей $\frac{3}{4}x$; других рыб у Бориса – y штук, у Андрея – $\frac{3}{4}y$.

Поэтому $\left(x + \frac{3}{4}y\right) : \left(\frac{3}{4}x + y\right) = 55:45$. Отсюда $3x = 17y$. Кроме того, и x , и y должны делиться на 4. Значит, $x = 17 \cdot 4k$, $y = 3 \cdot 4k$, при этом целое k определяется из условия $\frac{3}{4}x + y \leq 100$.

3. $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Указание. По теореме о биссектрисе $BD:BC = DF:FC = 3:4$ (рис.46). Поэтому $BC = 4b$, $BD = 3b$, $AD = b$. Далее:

$$OD^2 = AD \cdot BD; b = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ Значит,}$$

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 4b \cdot R = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

4. 19; 20; 21; 22; 23.

Указание. Обозначив $f(y) = y^{17} + 2y^{11} + 4y^5 - 1$, получим, что $f(y) < 0$ при $y \leq 0$ и $f(y) > 0$ при $y \geq 1$. Поэтому ввиду непрерывности уравнение $f(y) = 0$ имеет хотя бы один корень на промежутке $(0; 1)$ и не имеет корней вне этого промежутка, т.е. $a \in (0; 1)$. Неравенство равно-

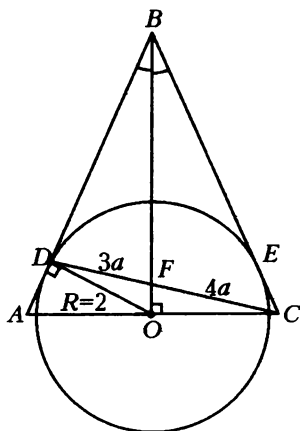


Рис. 46

нослительно

$$a^x \geq a^6 + 8a^5 - 2 = a^6 - 2a^{17} - 4a^{11} = a^6(1 - 2a^{11} - 4a^5) = a^6 a^{17} = a^{23}.$$

Поэтому $x \leq 23$.

5. (ii) $\frac{\pi k}{3}$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$; $k, n \in \mathbf{Z}$. Указание. Полученное десятизначное число должно делиться на 9 и на 4, поэтому число a делится на 4, а сумма его цифр равна 5 или 14. Наименьшим из таких чисел является 32. Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 4x - \cos 2x = \sin 3x$. После этого перейдите от разности косинусов к произведению.

6. $2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. Указание. Из равенства тангенсов следует, что один из углов четырехугольника больше 180° . Тогда углы равны: 225° , 45° , 45° , 45° .

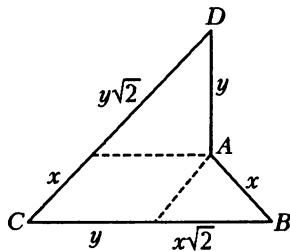


Рис. 47

Если в получившемся невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ ($\angle A = 225^\circ$, рис.47) обозначить $AB = x$, $AD = y$, то можно показать, что $BC = x\sqrt{2} + y$, $CD = y\sqrt{2} + x$. Если принять для определенности, что $y \geq x$, то длины сторон по возрастанию: x ; y ; $x\sqrt{2} + y$; $x + y\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $(-2; 1) \cup (5; 7)$.

$$\text{Указание.} \quad \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi x}{6}\right) + 1 > 0, \\ x^2 - 5x - 14 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) < \frac{1}{2}, \\ x \in (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < \frac{\pi x}{6} < \frac{13\pi}{6} + 2\pi k, \\ x \in (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 12k < x < 13 + 12k, \\ x \in (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (5; 7).$$

2. 1. *Указание.* Если всего сотрудников n , то $n(n-1) = 32 + 40$. Отсюда $n = 9$.

Пусть имеется k правдивцев и $9 - k$ лжецов. Тогда всего будет ответов «правдивец»: $k(k-1) + (9-k)(8-k) = 2k^2 - 18k + 72$, ответов «лжец»: $k(9-k) + (9-k)k = 18k - 2k^2$. Отсюда $k = 4$ (тогда $9 - k = 5$) или $k = 5$ (тогда $9 - k = 4$). В обоих случаях разность равна 1.

3. $38 \sin 40^\circ$. *Указание.* Так как медиана равна половине стороны, к которой проведена, то треугольник прямоугольный и M – центр описанной окружности.

Коэффициент подобия равен отношению радиусов описанных около каждого из треугольников окружностей, т.е. отношению радиуса окружности, вписанной в $\triangle ABC$ и описанной около него: $k = \frac{r}{R} = \frac{a+b-c}{2} : \frac{c}{2} = \frac{a+b-c}{c}$ (здесь a, b – катеты; c – гипотенуза). Значит, искомый периметр равен

$$P_{ABC} \cdot k = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{c} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{c} = \frac{2ab}{c} = \frac{2ch}{c} = 2h,$$

где h – высота, опущенная на гипотенузу.

4. $(11; 2)$ при $c = -2$; нет решений при $c \neq -2$.

Указание. По условию

$$22 \geq \frac{9}{\sqrt{x+c}} + \sqrt{x+c} + \frac{16}{\sqrt{y-c}} + 4\sqrt{y-c} \geq \\ \geq 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x+c}} \cdot \sqrt{x+c}} + 2\sqrt{\frac{16}{\sqrt{y-c}} \cdot 4\sqrt{y-c}} = 6 + 16 = 22.$$

Поэтому возможно только равенство, а оно достигается лишь при $\sqrt{x+c} = 3$, $\sqrt{y-c} = 2$. Отсюда $x = 9 - c$, $y = 4 + c$.

Подстановка в уравнение дает: $2^{-c-2} \log_2(-c) = 1$, или $\log_2(-c) = 2^{c+2}$. Слева – убывающая функция, справа – возрастающая. Поэтому у уравнения не более 1 корня, который легко находится подбором: $c = -2$.

5. (ii) 20. **Указание.** Примите за неизвестную одну часть боковой стороны и, воспользовавшись равенством отрезков касательных, проведенных из одной точки, выразите все стороны трапеции через введенную неизвестную. Составьте уравнение, используя теорему Пифагора и знание высоты трапеции.

6. $(5 - 2\sqrt{6}; 8 - 2\sqrt{6}) \cup (5 + 2\sqrt{6}; 8 + 2\sqrt{6})$. **Указание.** Неравенство приводится к виду $\frac{(x-8)^2 + (y+5)^2 - 24}{(x-7)^2 + (y+6)^2 - 6} \leq 0$. На плос-

кости это один круг с центром $(8; -5)$ и радиусом $2\sqrt{6}$, из

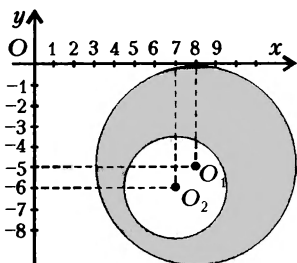


Рис. 48

которого вырезали другой круг с центром $(7; -6)$ и радиусом $\sqrt{6}$ (рис.48).

Уравнение задает пару прямых – горизонтальную и вертикальную. Сечение множества решений неравенства вертикальными прямыми $x = c$ при возрастании параметра c последовательно дает: пустое множество; точку (крайнюю слева при $c = 8 -$

$-2\sqrt{6}$); отрезок; два промежутка (переход происходит в крайней левой точке меньшей окружности при $c = 7 - \sqrt{6}$); снова отрезок (начиная с $c = 7 + \sqrt{6}$); точку ($c = 8 + 2\sqrt{6}$); пустое множество. Аналогичную структуру имеют сечения горизонтальными прямыми $y = -c$.

Множество решений системы является отрезком, когда одно из сечений дает отрезок, а второе пусто.

Вариант 3

1. $\{-2\} \cup (3; +\infty)$. *Указание.* Неравенство равносильно $\frac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$.

2. 4; $3 + \sqrt{3}$.

3. $(-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [7; +\infty)$.

Указание. При $x \in (-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$ неравенство равносильно

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 21 = 0, \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0. \end{cases}$$

4. $\pm \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}$; $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. *Указание.* Стороны треугольника обозначаем a, aq, aq^2 . Треугольник прямоугольный, поэтому $a^2 + a^2q^2 = a^2q^4$.

6. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$. *Указание.* При $20 - x^2 > 0$, $20 - x^2 \neq 1$, $x \geq 0$ правая часть уравнения равна нулю. Поэтому $\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. а) 240π ; б) 289π . *Указание.* По условию высота цилиндра $H \leq 15$; легко получить, что диаметр основания $D \leq 8$. Поэтому $17 = AB \leq \sqrt{H^2 + D^2} \leq \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$. Таким образом, цилиндр определен однозначно: $H = 15$, $D = 8$. Объем цилиндра легко находится, а искомый шар описан вокруг цилиндра и имеет диаметр 17.

8. -1. *Указание.* Чтобы был определен $\arcsin(y+1)$, необходимо ограничение $y+1 \in [-1; 1]$. Поэтому для данных в условии трех чисел: $\cos(\arcsin(y+1)) \in [0; 1]$, $|y+1| \in [0; 1]$, $2^{y^2+2y+2} \in [2; 4]$. Так как расстояние между средним и наименьшим из этих чисел не больше 1, а между наибольшим и средним – не меньше 1, то разность прогрессии должна равняться 1.

9. $\left[-1; -\frac{7}{9}\right]$. *Указание.* Обозначив $3^{-2x} = t$, получим уравнение $t^2 + 3bt + 3b + 3 = 0$, которое должно иметь ровно два поло-

жильных корня, т.е.

$$\begin{cases} D = 9b^2 - 12b - 12 > 0, \\ t_1 + t_2 = -3b > 0, \\ t_1 t_2 = 3b + 3 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $b \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$. Условие $\max(x_1; x_2) \geq \frac{1}{2}$ равносильно тому, что $\min(t_1; t_2) \leq \frac{1}{3}$. Так как при $b \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ ось симметрии параболы $f(t) = t^2 + 3bt + 3b + 3$ лежит правее $t = 1$, то для выполнения условия $\min(t_1; t_2) \leq \frac{1}{3}$ необходимо и достаточно $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 0$.

Вариант 4

1. Второе. *Указание.* Первое число равно $\left(-\frac{1}{25}\right)$; второе равно $\left(-\frac{1}{26}\right)$.

2. $[-5; -2) \cup (-2; 1)$.

3. а) 294; б) на 25%. *Указание.* Количества жителей в деревнях относятся как 8 : 12 : 15 : 6.

4. 7. *Указание.* Трапеция равнобокая. Покажите, что ее высота равна полусумме оснований, которая, в свою очередь, равна средней линии.

5. $\left[0; \frac{1}{2}\right)$. *Указание.* Исходное неравенство равносильно $4x^3 - 9x^2 + 2 > x - x^2 \geq 0$.

6. $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{\pi}{8} + \pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$. *Указание.* Рассмотрите случаи $\sin 2x > 0$ и $\sin 2x < 0$.

7. $(-16; -9] \cup \{-8\} \cup [-7; 0) \cup (-0; 9]$. *Указание.* Нанесите на числовую ось точки, в которых соответствующие функции на области определения $x \in (-16; 0) \cup (0; +\infty)$ обращаются в ноль $(-8, -7, \pm 9)$, и примените метод интервалов.

8. $192\sqrt{3}$. *Указание.* Обозначим угол между основанием и боковой гранью через φ , а сторону основания через a . Так как

$$\cos \varphi = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}}, \text{ то}$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) = \frac{a^2 \sqrt{3} (1 + \cos \varphi)}{4 \cos \varphi}.$$

Ввиду того, что (рис.49)

$$\sin \varphi = \frac{OG}{OD} = \frac{2EF \cdot 3}{AD} = \frac{24}{a\sqrt{3}},$$

получим:

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{\sin \varphi}.$$

Поэтому

$$S_{\text{полн}} = \frac{64 \cdot 3\sqrt{3} (1 + \cos \varphi)}{4 \sin^2 \varphi \cos \varphi} = \frac{48\sqrt{3}}{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi}.$$

Площадь минимальна, если знаменатель максимален, т.е.

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}.$$

9. 11837; 111837; 1671837; 18371837. Указание. По условию $10000a + 1837 = na$. Поэтому $a(n - 10000) = 1837$, т.е. a является делителем числа 1837.

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. $[-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

2. $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 4$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 3$.

3. 1. Для последовательных членов арифметической прогрессии должно выполняться равенство

$$5 \cdot 2^x + \frac{20}{2^x} = 2 \cdot (10 - \sqrt{x^2 - 1}).$$

Оценим левую часть:

$$5 \cdot 2^x + \frac{20}{2^x} \geq 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 2^x \cdot \frac{20}{2^x}} = 20.$$

Оценим правую часть:

$$2 \cdot (10 - \sqrt{x^2 - 1}) \leq 2 \cdot 10 = 20.$$

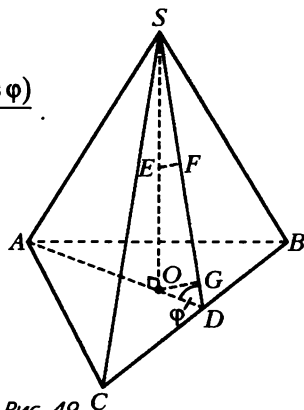


Рис. 49

Из этого следует, что равенство возможно, только если обе части уравнения равны 20. Нетрудно установить, что это возможно только при $x = 1$.

$$4. \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8} \right), \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8} \right), \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\left(-\frac{1}{6} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\pi k}{3} + \pi + 2\pi n; \frac{1}{12} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\pi k}{6} \right), \quad n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\left(\frac{1}{6} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\pi k}{3} + \pi + 2\pi n; -\frac{1}{12} \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\pi k}{6} \right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

5. $(-\infty; -6] \cup \left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Точки, удовлетворяющие первому неравенству, представляют собой внутренность круга с центром в точке $O_1(a-1; 2a+3)$ и радиусом $R_1 = 4\sqrt{5}$, а второго – внутренность круга с центром в точке $O_2(2a-3; 4a-1)$ и радиусом $R_2 = 2|a|\sqrt{5}$ (при $a \neq 0$). Расстояние между центрами $O_1O_2 = d = |a-2|\sqrt{5}$.

Условию задачи удовлетворяют те значения параметра a , при которых либо $\begin{cases} R_1 \geq R_2, \\ d + R_2 \leq R_1, \end{cases}$ либо $\begin{cases} R_1 \leq R_2, \\ d + R_1 \leq R_2. \end{cases}$ Решениями первой системы будут $a \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$, а второй $a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$.

$$6. 1) \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{9}; \quad 2) V_{\max} = 3(1 + \sqrt{13}).$$

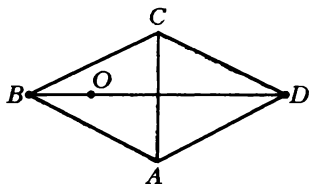


Рис. 50

Указание. Объем пирамиды максимален, если максимальна площадь основания. Пусть O – основание высоты SO пирамиды (рис.50). Точка D лежит на окружности радиуса $\sqrt{78}$ с центром в точке O . Площадь будет наибольшей, если точки B , O и D лежат на одной прямой.

1. Из закона сохранения энергии для системы тело–пружина имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m(v/2)^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2},$$

где Δl – искомая деформация пружины к тому моменту, когда скорость тела будет равна $v/2$. Отсюда находим

$$\Delta l = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} v.$$

2. Для получения изображения S' источника нужно построить ход двух лучей, вышедших из источника S ; точка пересечения этих лучей и будет изображением источника. Построение хода луча, параллельного главной оптической оси линзы, и луча, проходящего через ее оптический центр, выполнено на рисунке 51.

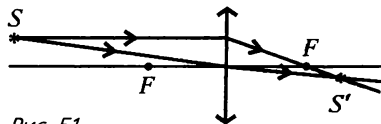


Рис. 51

Чтобы найти расстояние от изображения до главной оптической оси, заметим, что отношение расстояний от источника и изображения до главной оптической оси равно отношению расстояний от источника и изображения до плоскости линзы. Последнее отношение найдем по формуле линзы

$$\frac{1}{3F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где буквой f обозначено расстояние от изображения до линзы. Из формулы получаем

$$f = \frac{3F}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{y} = \frac{3F}{(3F/2)} = 2, \text{ и } y = \frac{x}{2},$$

где y – искомое расстояние от изображения до главной оптической оси.

3. Угол подлета тела к ступеньке – это угол β между направлением его скорости и плоскостью ступеньки (рис.52). Этот угол можно найти через проекции вектора скорости. При движении тела под углом к

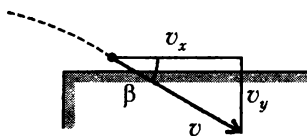


Рис. 52

горизонту проекция его скорости на горизонтальную ось (x) не изменяется и равна $v_x = v_0 \cos \alpha$. Величину скорости v на поверхности ступеньки можно найти по закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \text{ откуда } v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

(Конечно, высота ступеньки должна быть меньше максимальной высоты подъема $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, иначе тело не сможет попасть на ее поверхность. При выполнении этого условия полученное подкоренное выражение положительно.)

Окончательно находим

$$\beta = \arccos \frac{v_x}{v} = \arccos \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}.$$

4. Коэффициент полезного действия теплового цикла есть отношение работы, совершенной газом за цикл, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя в течение цикла. Найдем эти величины.

В течение цикла газ получает тепло от нагревателя в процессах 1-2 и 2-3, а отдает тепло в процессе 3-1 (рис.53). Количество теплоты Q_{13} , полученное от

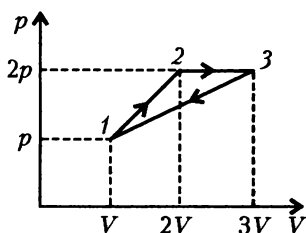


Рис. 53

нагревателя, найдем, применяя к процессу 1-2-3 первый закон термодинамики:

$$Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13},$$

где ΔU_{13} — изменение внутренней энергии газа в этом процессе, A_{13} — работа газа. Изменение внутренней энергии выражаем через изменение температуры, а затем с помощью закона Клапейрона-Менделеева связываем с изменениями давления и объема:

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2}(\nu RT_3 - \nu RT_1) = \frac{15}{2}pV.$$

Работа газа A_{13} в процессе 1-2-3 равна площади под графиком на диаграмме зависимости давления от объема:

$$A_{13} = \frac{7}{2}pV.$$

В результате находим

$$Q_{13} = 11pV.$$

Работу газа A в течение всего цикла найдем как площадь цикла на графике зависимости $p(V)$:

$$A = \frac{1}{2} pV.$$

Окончательно для коэффициента полезного действия рассматриваемого циклического процесса получаем

$$\eta = \frac{A}{Q_{13}} = \frac{1}{22} \approx 4,5\%.$$

5. Перемычка будет находиться в равновесии, если ток через нее будет равен нулю (тогда на нее не действует магнитное поле). Это положение можно найти из закона Ома для замкнутой цепи и для неоднородного участка цепи. По закону Ома для замкнутой цепи для тока в рельсах (при условии, что ток через перемычку равен нулю) имеем

$$I = \frac{3\varepsilon}{2\rho L}.$$

Пусть длина рельсов от положения равновесия перемычки до источника с ЭДС ε равна x (рис.54). Тогда по закону Ома для участка цепи AB (при условии, что напряжение между его концами равно нулю) имеем

$$\varepsilon = 2I\rho x = \frac{3\varepsilon}{L} x,$$

откуда находим

$$x = \frac{L}{3}.$$

Если же рассмотреть участок цепи CD , содержащий ЭДС ε и более короткие, чем x , части рельсов (рис.55), то из закона Ома для неоднородного участка цепи находим

$$U_{DC} = \varepsilon - Ir,$$

где r – сопротивление рельсов между точками C и D (через источник с ЭДС ε). Так как $r < 2\rho x$, получаем, что $U_{DC} > 0$. Поэтому, если перемычка сместится из положения равновесия влево, по ней начинает течь ток, направленный вверх, и со стороны магнитного поля на перемычку будет действовать сила Ампера, направленная вправо. Аналогично, если перемычка сместится от положения равновесия вправо, сила Ампера будет направлена влево. Таким образом, при любых

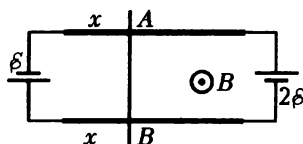


Рис 54

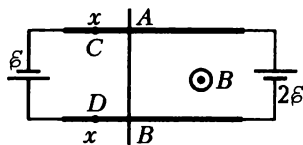


Рис. 55

смещениях перемычки в ней будет возникать электрический ток, и сила Ампера будет возвращать перемычку в положение равновесия. Это приведет к тому, что перемычка будет совершать колебания около положения равновесия.

Чтобы определить период колебаний, найдем возвращающую силу. Пусть смещение перемычки от положения равновесия

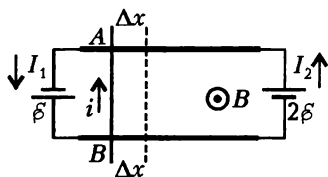


Рис. 56

равно Δx , а токи через источники в этом положении равны I_1 и I_2 (рис.56). Поскольку напряжение на концах перемычки в любой момент времени равно нулю, по закону Ома для участка цепи между A и B, через источник с ЭДС ε , имеем

$$\varepsilon - I_1 \cdot 2\rho \left((L/3) - \Delta x \right) = 0, \text{ или } I_1 = \frac{\varepsilon}{2\rho \left((L/3) - \Delta x \right)}.$$

Аналогично, для тока через второй источник получим

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{2\rho \left((2L/3) + \Delta x \right)}.$$

Теперь найдем ток через перемычку:

$$i = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2\rho} \frac{3\Delta x}{\left((L/3) - \Delta x \right) \left((2L/3) + \Delta x \right)} = \frac{27\varepsilon}{4\rho L^2} \Delta x$$

(в последнем приближенном равенстве использована малость отклонения перемычки от положения равновесия по сравнению с длиной рельсов) и силу Ампера, действующую на перемычку со стороны магнитного поля:

$$F = iBl = \frac{27\varepsilon Bl}{4\rho L^2} \Delta x.$$

Видим, что эта сила пропорциональна смещению перемычки, и, следовательно, перемычка будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4m\rho L^2}{27Bl\varepsilon}}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. (13; 23).

Имеем

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 + 16y + 6x + 8 = 4y^2 + 12y + 9, \\ x^2 - 6x - y + 13 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$$

при условиях $0 < 2y + 3 \neq 1$ и $0 < x - 4 \neq 1$. Получаем $-x^2 + 6x = -4y + 1$ и $-y = -2x + 3$. Следовательно, $-x^2 + 6x = -8x + 13$, т.е. $x^2 - 14x + 13 = 0$. Тогда либо $x = 1$, и в этом случае $x - 4 = -3 < 0$, т.е. это не решение, либо $x = 13$, а $y = 2x - 3 = 23$, и в этом случае $0 < x - 4 = 9 \neq 1$ и $0 < 2y + 3 = 49 \neq 1$, т.е. это решение.

2. [6; 18]. После замены $t = 2^{\sqrt{x-2}} \geq 1$ неравенство приводится к виду

$$\left| \frac{t}{4} - 2 \right| \leq \frac{4}{3}t - \frac{t^2}{16} - \frac{10}{3}.$$

Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{t}{4} - 2 \leq \frac{4}{3}t - \frac{t^2}{16} - \frac{10}{3}, \\ \frac{t}{4} - 2 \geq -\frac{4}{3}t + \frac{t^2}{16} + \frac{10}{3}, \end{cases}$$

решая которую, получаем

$$4 \leq t \leq 16.$$

Осталось решить систему

$$2 \leq \sqrt{x-2} \leq 4.$$

$$3. \quad \pi k, \quad \alpha + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi k, \quad \pi - \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Решение задачи после преобразований сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3\cos^2 4x - \cos 4x - 2 = 0, \\ \cos 3x \neq 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы следует, что

$$\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 4x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решения первого уравнения $x = \frac{\pi n}{2}$ удовлетворяют системе при четных $n = 2k$ (при этом $\sin x = 0$). Решения второго уравнения

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$$

удовлетворяют условию $\cos 3x \neq 0$, так как если $\cos 3x = 0$, то $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi l}{3}$, $l \in \mathbf{Z}$ и $\cos 4x = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4l\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}(1 + 2l) \neq -\frac{2}{3}$ ни при каком l .

Осталось выбрать решение второго уравнения, для которых $\sin x \geq 0$. Пусть $\alpha = \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$. Тогда $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Если $n = 4k$, то $x = \pm \alpha + 2\pi k$ и $\sin x = \pm \sin \alpha$, так что системе удовлетворяют $x = \alpha + 2\pi k$.

Если $n = 4k + 1$, то $x = \frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi k$ и, очевидно, $\sin x > 0$.

Если $n = 4k + 2$, то $x = \pi \pm \alpha + 2\pi k$ и системе удовлетворяют $x = \pi - \alpha + 2\pi k$.

При $n = 4k + 3$ имеем $x = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi k$ и $\sin x < 0$.

$$4. \quad r = \frac{7}{4}, \quad \rho = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad V = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т.е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O – центр данной сферы, h – высота призмы. Пусть P и P_1 – середины отрезков AD и A_1D_1 . Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{PP'} = \frac{5}{3}$.

Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M . Пусть A', B', C', D' – проекции точек A, B, C, D на Π , и пусть X – середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = \frac{5}{3}$. Тогда $A'K = 5t$,

$B'K = 3t$, $A'B' = A'K + B'K = 8t = 2$, откуда $t = \frac{1}{4}$. Следова-

тельно, $HK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\Delta A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно,

$$P'X \perp A'B' \text{ и } P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}. \text{ Тогда } P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{1}{16} = \frac{49}{16}. \text{ Аналогично можно установить, что } P'L^2 = P'M^2 = \frac{49}{16}. \text{ Это означает, что } P' \text{ — центр окружности радиуса } r = \frac{7}{4},$$

описанной около треугольника KLM , и значит, O лежит на перпендикуляре к Π , проходящем через P' , т.е. на прямой P_1P .

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Введем теперь прямоугольную систему

координат $P'xyz$ с началом координат в точке P' так, что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$.

Запишем координаты точек и векторов: $O(0; 0; z)$, $K\left(\sqrt{3}; \frac{1}{4}; 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}; \frac{1}{4}; -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0; 2; h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{1}{16} + z^2 = 4, \\ \frac{1}{2} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$, и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{2}{\sqrt{15}}$, т.е. искомый объем призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

5. Указание. На продолжении луча CC_1 отложим отрезок C_1C' , равный OC_1 (рис.57). Четырехугольник $OBС'А$ — парал-

$OB_1 = 6$, $OA_2 = \sqrt{13} - 1$, $OB_2 = \sqrt{13} + 1$. Если $|a| < OA_2$ или $|a| > OB_1$, то окружность L не имеет общих точек с множеством E – в этом случае решений у системы нет. Если $OA_2 \leq |a| \leq OB_2$ или $OA_1 \leq |a| \leq OB_1$, то L и E имеют хотя бы одну общую точку. Так как $OB_2 > OA_1$, то при $OA_2 \leq |a| \leq OB_1$ система имеет хотя бы одно решение.

$$7. \quad (0; 0; 0), \quad (-1; 2; -1), \quad \left(\frac{\sqrt{37}-17}{6}; \frac{1+\sqrt{37}}{3}; -\frac{1+\sqrt{37}}{6} \right), \\ \left(-\frac{\sqrt{37}+17}{3}; \frac{1-\sqrt{37}}{3}; \frac{\sqrt{37}-1}{6} \right).$$

Сложив уравнения системы, получаем $0 = -2y - 4z$, т.е. $y = -2z$. Сложив первое и третье уравнения, получим $z^2 - y^2 = x - 5y - 8z$, откуда в силу $y = -2z$ получаем $-3z^2 = x + 2z$, т.е. $x = -3z^2 - 2z$. Подставляя это в третье уравнение системы, получаем $z^2 - z^2(3z + 2)^2 = -9z^2 - 9z$. Если $z = 0$, то $x = y = 0$. Если $z \neq 0$, то $z - z(9z^2 + 12z + 4) = -9z - 9$, т.е. $3z^3 + 4z^2 - 2z - 3 = 0$. Тогда $z = -1$ – корень уравнения, и $(z + 1)(3z^2 + z - 3) = 0$. Следовательно, корнями уравнения также являются $z = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$. При $z = -1$ получаем $x = -1$ и $y = 2$.

При $z = -\frac{1 + \sqrt{37}}{6}$ получаем

$$x = -3z^2 - 2z = -3z^2 - z + 3 - z - 3 = -z - 3 = \frac{\sqrt{37} - 17}{6},$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{37}}{3}.$$

При $z = \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$ получаем $x = -z - 3 = \frac{\sqrt{37} + 17}{6}$, $y = \frac{1 - \sqrt{37}}{3}$.

Вариант 2

$$1. \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$$\cos 3x + 2 \cos x = (4 \cos^2 x - 1) \cos x = (2 \cos 2x + 1) \cos x,$$

а

$$\sin 3x = (3 - 4 \sin^2 x) \sin x = (4 \cos^2 x - 1) \sin x,$$

то исходное уравнение равносильно $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x$ при условии

$\cos 2x \neq -\frac{1}{2}$. Получаем $\operatorname{tg}^3 x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin 2x = 1 \neq 0$ и $\cos 2x = 0 \neq -\frac{1}{2}$. Следовательно, это решения.

$$2. \left(\frac{5}{16}; -\frac{1}{16} \right).$$

Из первого уравнения имеем $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \geq 0$ и $\sqrt{x^2 - 9y^2} = -x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$. Следовательно,

$$-9y^2 = -2x\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4, \text{ т.е. } -2x = -(4y)^2 - \frac{9}{16}.$$

Из второго уравнения системы имеем $4y + 1 \geq 0$ и $-2x = (4y)^2 + 12y + \frac{1}{16}$. Значит, $2(4y)^2 + 3(4y) + \frac{5}{8} = 0$. Тогда $4y = \frac{-3 \pm 2}{4}$. Если $4y = -\frac{5}{4}$, то $4y + 1 = -\frac{1}{4} < 0$, т.е. это не решение. Если же $4y = -\frac{1}{4}$, то $4y + 1 = \frac{3}{4} > 0$, $y = -\frac{1}{16}$, а $-2x = -\frac{5}{8}$, т.е. $x = \frac{5}{16}$. При этом $-x + \frac{9}{16} = \frac{1}{4} > 0$ и $-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{13}{24} > 0$, т.е. это решение.

$$3. (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4).$$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$. Преобразуем неравенство к виду

$$\log_{|x|}(\sqrt{5-x} + 4) \geq \log_{|x|}(8-2x).$$

При $|x| > 1$ имеем $\sqrt{5-x} + 4 \geq 8-2x$, т.е. $\sqrt{5-x} \geq 4-2x$. Следовательно, либо $x > 2$, либо $x \leq 2$ и $5-x \geq (4-2x)^2$. Тогда при $x \leq 2$ получаем $4x^2 - 15x + 11 \leq 0$, т.е. $x \in \left[1; \frac{11}{4}\right]$. Следовательно, $x \geq 1$, а учитывая ОДЗ, получаем $x \in (1; 4)$ – решения. При $|x| < 1$ имеем $\sqrt{5-x} + 4 \leq 8-2x$, т.е. $x \leq 1$. Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ – решения.

$$4. r = \frac{\sqrt{79}}{5}, \rho = \frac{\sqrt{21}}{5}, V = \frac{12}{\sqrt{7}}.$$

$$5. \angle CBD = \frac{\pi}{4}, \angle BAC = \arctg \frac{1}{3}.$$

Пусть $\angle ABE = \angle DBE = \angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DE = x$. Тогда $CD = 2x$ и $AE = 3x$. Так как BE является биссектрисой в $\triangle ABD$, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = 3$, т.е. $AB = 3BD$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{3BD}{\sin \beta} = \frac{6x}{\sin 3\alpha} \text{ и } \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{2x}{\sin \alpha}.$$

Следовательно, получаем $\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{2x}{\sin \alpha}$, т.е. $\sin 3\alpha = \sin \alpha$. Так

как по условию справедливы неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то получаем

равенство $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle ABD = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\triangle ABD$

прямоугольный. Тогда $\tg \angle BAC = \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3}$, т.е.

$$\angle BAC = \arctg \frac{1}{3}.$$

6. Заметим, что если (x_0, y_0) – решения системы, то (y_0, x_0) – тоже решение. Поэтому из единственности решения следует, что $x = y$. При $x = y$ получаем уравнение $x^2 + x + a = 0$, имеющее единственное решение при $a = \frac{1}{4}$. Если же $a = \frac{1}{4}$, то система

$$\begin{cases} x + y^2 + \frac{1}{4} = 0, \\ x^2 + y + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Для доказательства этого, сложив уравнения системы и выделив полные квадраты, получим

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

т.е. $x = y = -\frac{1}{2}$. При этом $x = y = -\frac{1}{2}$ – решение.

$$7. \quad (0; 0; 0), \quad \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \quad \left(0; \frac{1}{2}; 0\right), \quad \left(0; 0; \frac{1}{2}\right), \quad (1; 1; 1), \\ \left(-\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right), \left(\frac{3}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{3}{7}\right), \left(\frac{3}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{1}{7}\right).$$

Имеем

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) + z(x - y) = x - y, \\ 2(y^2 - z^2) + x(y - z) = y - z, \\ 2z^2 - xy - z = 0, \end{cases} \begin{cases} (x - y)(2x + 2y + z - 1) = 0, \\ (y - z)(2y + 2z + x - 1) = 0, \\ 2z^2 - xy - z = 0. \end{cases}$$

1) Если $x = y = z$, то $z^2 = z$ и $z = 0 = x = y$ или $z = 1 = x = y$.

2) Если $x = y \neq z$, то $2y + 2z + x = 1$, т.е. $3x = 1 - 2z$ и $2z^2 = x^2 + z$. Тогда $x = \frac{1}{3}(1 - 2z)$ и $2z^2 = \frac{1}{9}(4z^2 - 4z + 1) + z$.
Получаем $14z^2 - 5z - 1 = 0$ и $z = \frac{1}{2}$ или $z = -\frac{1}{7}$. Если $z = \frac{1}{2}$, то $x = y = 0$. Если $z = -\frac{1}{7}$, то $x = y = \frac{3}{7}$.

3) Если $z = y \neq x$, то $2x + 2y + z = 1$, т.е. $2x = 1 - 3y$ и $2y^2 = (x + 1)y = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}y^2$. Тогда либо $y = 0 = z$ и $x = \frac{1}{2}$, либо $\frac{7}{2}y = \frac{3}{2}$. Получаем $y = \frac{3}{7} = z$ и $x = -\frac{1}{7}$.

4) Если $x \neq y \neq z$, то $2x + 2y + z = 2y + 2z + x = 1$.
Следовательно, $x = z$ и $2y + 3x = 1$, т.е. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Получаем $2x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2$, т.е. либо $x = 0 = z$ и $y = \frac{1}{2}$, либо $2x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$,
 $x = \frac{3}{7} = z$ и $y = -\frac{1}{7}$.

Вариант 3

$$1. r = \frac{5}{4}, \rho = \frac{195}{8}.$$

Пусть M и N – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямые BC и AB соответственно, F – точка пересечения прямых AM и CN . Эта точка лежит на продолжении высоты BO треугольника ABC и является точкой пересечения высот $\triangle ABC$. Если $\angle ABO = \varphi = \angle FBN$, то $2\varphi = \angle ABC$, и $2\cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi = 1 - \frac{161}{289} = \frac{128}{289}$. Следовательно, $\cos \varphi = \frac{8}{17}$,
 $\sin \varphi = \frac{15}{17}$, $AB = BC = \frac{BO}{\cos \varphi} = 17$, $AC = 2AB \sin \varphi = 30$.

Пусть S – площадь $\triangle ABC$, p – его полупериметр, r – радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AC = 120$, где $p = AB + AO = 32$, откуда $r = \frac{15}{4}$.

Пусть E – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда точка E лежит на отрезке BO и $BE = BO - r = \frac{17}{4}$. Имеем $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $AN = AC \cos \angle BAC = AC \sin \varphi = \frac{450}{17}$, $BN = AN - AB = \frac{450 - 289}{17} = \frac{161}{17}$, $BF = \frac{BN}{\cos \varphi} = \frac{161}{8}$. Тогда искомое расстояние ρ между точками пересечения высот и медиан $\triangle ABC$ равно $BF + BE = \frac{161}{8} + \frac{17}{4} = \frac{195}{8}$.

$$2. \frac{\pi n}{2}, \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

ОДЗ: $\cos 6x \neq 0$. Имеем

$$\operatorname{tg} 6x - \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 4x}{\cos 2x \cos 6x} = \frac{2 \sin 4x \sin 2x}{\cos 2x \cos 6x} - \frac{4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x}{\cos 2x \cos 6x},$$

откуда получаем $2 \sin 2x = 4 \sin^2 2x - 4 \sin 2x \cos 4x$. Тогда либо $\sin 2x = 0$ и $x = \frac{\pi n}{2}$ – в ответ, либо $1 = 2 \sin 2x - 2(1 - 2 \sin^2 2x)$.

Получаем $4 \sin^2 2x + 2 \sin 2x - 3 = 0$. Тогда либо

$$\sin 2x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} < -1 \text{ – не имеет решений, либо } \sin 2x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$$

и $x = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin \frac{\sqrt{13}-1}{4} + \frac{\pi n}{2}$ – в ответ.

$$3. \left(-\frac{7}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) \cup (\sqrt{2} - 2; 2).$$

Пусть $\log_2(x+2) = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\left| t + \frac{1}{t} - 1 \right| + \left| t + \frac{1}{t} + 1 \right| < 5.$$

Пусть $u = t + \frac{1}{t}$. Тогда $|u - 1| + |u + 1| < 5$, что равносильно $|u| < \frac{5}{2}$.

Отсюда получаем $\frac{t^2 + 1}{|t|} < \frac{5}{2}$, т.е. $2|t|^2 - 5|t| + 2 < 0$. Следова-

тельно, $(|t|-2)\left(|t|-\frac{1}{2}\right) < 0$, т.е. $\frac{1}{2} < |t| < 2$. Тогда либо $-2 < \log_2(x+2) < -\frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{7}{4} < x < -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, либо $\frac{1}{2} < \log_2(x+2) < 2$, т.е. $\sqrt{2}-2 < x < 2$.

$$4. LD = 9, h = \frac{3}{2}\sqrt{35}, \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{35}{156}}.$$

Пусть $XK = a$, $XL = b$. Из теоремы Пифагора для треугольников XKC , XLC , XKD , XLD получаем $XC^2 = a^2 + 2^2 = b^2 + 6^2$, $XD^2 = a^2 + 7^2 = b^2 + LD^2$, откуда $a^2 - b^2 = 6^2 - 2^2 = LD^2 - 7^2$ и $LD^2 = 36 - 4 + 49 = 81$, т.е. $LD = 9$. Из прямоугольных треугольников XKA и XLB теперь получаем, что $XA^2 = a^2 + 11^2$, $XB^2 = b^2 + 6^2$. Поскольку $AX = 2XB$, получаем $a^2 + 11^2 = 4(b^2 + 6^2)$, а поскольку $a^2 - b^2 = 6^2 - 2^2 = 32$, то $(32 + b^2) + 121 = 4(b^2 + 36)$, откуда $3b^2 = 9$, $b = \sqrt{3}$, $a = \sqrt{32 + 3} = \sqrt{35}$. Длина высоты BH , т.е. расстояние от B до ACD , в полтора раза больше расстояния от X до той же плоскости (поскольку $AB = \frac{3}{2}XA$); последнее равно $XK = \sqrt{35}$, поэтому высота равна $\frac{3}{2}a = \frac{3}{2}\sqrt{35}$. Наконец, $AB = 3BX = 2\sqrt{XL^2 + LB^2} = 3\sqrt{3 + 36} = 3\sqrt{39}$; из прямоугольного треугольника ABH теперь получаем, что угол между AB и плоскостью ACD равен $\alpha = \arcsin \frac{BH}{AB} = \arcsin \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{35}{39}} \right)$.

5. $a \leq 0$ или $a > 1$.

ОДЗ: $x \geq -a$ и $x \geq -1$. Если $a > 1$, то на ОДЗ имеем неравенство $x + a \geq 0$. Следовательно, уравнение равносильно $3x + \sqrt{x+a}\sqrt{x+1} = 0$, т.е. $9x^2 = (x+a)(x+1)$ и $-1 \leq x < 0$. Так как на промежутке $-1 \leq x < 0$ функция $y = 9x^2$ убывает от $f(-1) = 9$ до $f(0) = 0$, а функция $g(x) = (x+a)(x+1)$ возрастает от $g(-1) = 0$ до $g(0) = a > 0$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке $-1 \leq x < 0$ ровно одно решение. Следовательно, все $a > 1$ удовлетворяют условию.

Если $a = 1$, то уравнение примет вид $\sqrt{x+1}(4x+1) = 0$. Оно имеет два решения $x = -1$ и $x = -\frac{1}{4}$.

Если $0 < a < 1$, то $x = -a$ решение, а при $x > -a$ имеем $3x + \sqrt{x+a}\sqrt{x+1} = 0$. Следовательно, $9x^2 = (x+a)(x+1)$ при $-a < x < 0$. Так как на промежутке $-a < x < 0$ функция $y = f(x) = 9x^2$ убывает от $f(a) = 9a^2 > 0$ до $f(0) = 0$, а функция $y = g(x) = (x+a)(x+1)$ возрастает от $g(-a) = 0$ до $g(0) = a > 0$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке $-a < x < 0$ ровно одно решение. Следовательно, при $0 < a < 1$ уравнение имеет два решения.

Если $a = 0$, то уравнение примет вид $x(3\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 0$ при $x \geq 0$. Оно имеет единственное решение $x = 0$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию.

Если $a < 0$, то $x = -a$ — решение, а при $x > -a$ имеем соотношение $3x + \sqrt{x+a}\sqrt{x+1} > -3a > 0$. Следовательно, в этом случае уравнение имеет единственное решение $x = -a$.

6. $(-1; -2; 3)$.

Пусть $a = x - y$, $b = y + z$, $c = z - x$; тогда $x = \frac{1}{2}(a + b - c)$, $y = \frac{1}{2}(-a + b - c)$, $z = \frac{1}{2}(a + b + c)$, и система переписывается в виде

$$\begin{cases} a(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc = 10, \\ b(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc = 26, \\ c(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc = 80. \end{cases}$$

Введем обозначения $s = a^2 + b^2 + c^2$, $t = abc$, тогда

$$a = \frac{2}{s}(t + 5), \quad b = \frac{2}{s}(13 - t), \quad c = \frac{2}{s}(40 - t).$$

Отсюда получаем

$$s = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{s^2}((t+5)^2 + (13-t)^2 + (40-t)^2),$$

т.е.

$$s^3 = 4((t+5)^2 + (13-t)^2 + (40-t)^2),$$

и

$$t = abc = \frac{8}{s^3}(t+5)(13-t)(40-t),$$

или

$$s^3 = \frac{8}{t}(t+5)(t-13)(t-40).$$

После преобразований приходим к уравнению

$$t^3 + 1284t - 5200 = 0 \Leftrightarrow (t - 4)(t^2 + 4t + 1300) = 0.$$

Единственным корнем последнего уравнения является $t = 4$.

Тогда находим $s^3 = \frac{8}{t}(t+5)(t-13)(t-40) = 18^3$, т.е. $s = 18$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, откуда и следует ответ.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Поместим начало координат в точку бросания нижнего комка, направив ось x горизонтально вправо, а ось y вертикально вверх. Пусть v_{1x} и v_{1y} – проекции на оси x и y скорости нижнего (первого) комка. Если точка столкновения имеет координаты (s, y) , то для нижнего комка можно записать

$$y = v_{1y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad s = v_{1x}t, \quad v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_1^2,$$

для верхнего (второго) комка –

$$y = H - v_2t - \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$v_1 = \frac{1}{t} \sqrt{(H - v_2t)^2 + s^2} = 10 \text{ м/с}.$$

2. Пусть V_c и V_x – объемы стекла и налитой воды соответственно, а V – вместимость бутылки. Запишем условия плавания бутылки до и после налива воды:

$$\rho_c V_c g = \frac{3}{4} \rho (V_c + V) g,$$

$$(\rho_c V_c + \rho V_x) g = \rho (V_c + V) g.$$

Отсюда получим

$$V_x = \frac{\rho_c}{4\rho_c - 3\rho} V = 250 \text{ мл}.$$

3. Напряжение и ток для резистора сопротивлением R_1 равны соответственно

$$U_1 = \sqrt{P_1 R_1} = 40 \text{ В}, \quad I_1 = \frac{U_1}{R_1} = 0,5 \text{ А}.$$

Тогда ток и мощность для резистора сопротивлением R_2 будут

равны

$$I_2 = \frac{U_1}{R_2} = 1 \text{ А} , \quad P_2 = \frac{U_1^2}{R_2} = 40 \text{ Вт} .$$

Соответственно, ток и мощность для резистора сопротивлением R_3 составят

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ А} , \quad P_3 = I_3^2 R_3 = 45 \text{ Вт} .$$

4. 1) Сразу после замыкания ключа ток через катушку не идет, а ток через резистор равен

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{\mathcal{E}}{4r} .$$

Тогда напряжение на катушке в этот момент равно

$$U_0 = I_0 R = \frac{3}{4} \mathcal{E} .$$

2) Обозначим $U = \frac{2}{3} \mathcal{E}$. Непосредственно перед размыканием ключа через резистор течет ток

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{2\mathcal{E}}{9r} ,$$

через источник течет ток

$$I_r = \frac{\mathcal{E} - U}{r} = \frac{\mathcal{E}}{3r} ,$$

а через катушку течет ток

$$I = I_r - I_R = \frac{\mathcal{E}}{9r} .$$

Сразу после размыкания ключа ток через катушку останется прежним, в ней запасется энергия, которая и выделится затем в цепи в виде тепла:

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{162r^2} .$$

5. Пусть V – начальный объем цилиндра, v_1 и v_2 – числа молей пара в цилиндре до и после сжатия, p_n – давление насыщенного пара, T – температура. Запишем уравнение состояния пара до и после сжатия:

$$0,7p_n V = v_1 RT , \quad p_n \frac{V}{10} = v_2 RT .$$

Отсюда находим

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{7} .$$

Следовательно, сконденсировалась часть пара

$$x = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = 1 - \frac{v_2}{v_1} = \frac{6}{7}.$$

6. 1) Начальный ток в цепи равен

$$I_0 = \frac{3U_0 - U_0}{R} = \frac{2U_0}{R}.$$

2) В момент размыкания ключа ток в цепи равен

$$I = \frac{I_0}{2} = \frac{U_0}{R}.$$

Пусть напряжения на конденсаторах в этот момент равны U_1 и U_2 . Тогда

$$U_2 - U_1 = IR, \quad CU_1 + 2CU_2 = CU_0 + 2C \cdot 3U_0.$$

Из последних трех уравнений находим

$$U_1 = \frac{5}{3}U_0, \quad U_2 = \frac{8}{3}U_0.$$

Начальная энергия конденсаторов была

$$W_1 = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{2C(3U_0)^2}{2} = \frac{19}{2}CU_0^2.$$

Энергия конденсаторов в момент размыкания ключа равна

$$W_2 = \frac{CU_1^2}{2} + \frac{2CU_2^2}{2} = \frac{17}{2}CU_0^2.$$

Значит, в цепи выделилось количество теплоты

$$Q = W_1 - W_2 = CU_0^2.$$

7. 1) Изображение в первой линзе является мнимым источником для второй линзы. По формуле линзы,

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где $d = 5$ см, $f = 10$ см. Отсюда фокусное расстояние второй линзы равно $F = -10$ см, т.е. эта линза рассеивающая.

2) Отношение размеров нового и старого изображений равно увеличению второй линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 2.$$

Вариант 2

1. При столкновении через время t координаты снежков совпадают. Поэтому запишем

$$v_1 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 3s - v_2 t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_1 \cos \alpha \cdot t = s.$$

Отсюда находим

$$v_2 = v_1 (3 \cos \alpha - \sin \alpha) = 9 \text{ м/с}.$$

2. Пусть ρ_c и ρ_v – плотности стекла и воды, V_c и V – объемы стекла и воздуха в бутылке. Запишем условие плавания бутылки:

$$\rho_c V_c g = \frac{2}{3} \rho_v (V_c + V) g.$$

Отсюда найдем

$$\frac{V}{V_c} = \frac{3\rho_c}{2\rho_v} - 1 = \frac{11}{4}.$$

3. По закону сохранения энергии,

$$\nu C (T_2 - T_1) = A + \nu C_V (T_2 - T_1),$$

где $\nu = 1$ моль, $C = 18 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, $C_V = \frac{3}{2} R$, $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, T_2 – конечная температура. Отсюда находим

$$T_2 = T_1 + \frac{A}{\nu(C - C_V)}.$$

Для конечных и начальных давлений и объемов можно записать

$$p_2 = k p_1, \quad V_2 = 4 V_1.$$

Или, с учетом уравнений состояния,

$$\nu R T_2 = p_2 V_2 = 4 k p_1 V_1 = 4 k \nu R T_1.$$

Окончательно получим

$$k = \frac{T_2}{4 T_1} = \frac{A + \nu(C - C_V) T_1}{4 \nu(C - C_V) T_1} \approx 2.$$

4. 1) Ток через катушку сразу после замыкания ключа равен нулю. Ток через резистор сопротивлением R и мощность, выделяющаяся в нем, равны соответственно

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{3R}, \quad P_0 = I_0^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{9R}.$$

2) Пусть непосредственно перед размыканием ключа ток в катушке I_L , напряжение на катушке U , в резисторе сопротивлением R мощность P_R , потребляемая катушкой мощность, т.е. скорость изменения энергии катушки, P_L . Имеем

$$P_L = U I_L, \quad I_L = \frac{\mathcal{E} - U}{R} - \frac{U}{2R} = \frac{2\mathcal{E} - 3U}{2R}, \quad P_R = \frac{U^2}{R} = \frac{(\mathcal{E} - U)^2}{R}.$$

По условию $2P_L = P_R$, тогда

$$2U \frac{2\varepsilon - 3U}{2R} = \frac{(\varepsilon - U)^2}{R},$$

откуда

$$U = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ и } I_L = \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Таким образом, после размыкания ключа в цепи выделяется количество теплоты

$$Q = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{32R^2}.$$

5. По закону сохранения энергии,

$$\frac{m(v_0/3)^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2},$$

где m – масса бруска, k – жесткость пружины, x – удлинение пружины в искомый момент. Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Из записанных уравнений находим

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} v_0 T.$$

6. 1) Зная величину и направление начального тока, получаем, что напряжение на конденсаторе емкостью C перед замыканием ключа K_2 равна 2ε . Поэтому ЭДС левой батареи равна 3ε .

2) Окончательно на нижнем конденсаторе напряжение будет ε , на верхнем 2ε . Заряд участка цепи, состоящего из соединенных проводником пластин конденсаторов, изменился от нуля до величины

$$+C\varepsilon - 2C \cdot 2\varepsilon = -3C\varepsilon.$$

Это означает, что через ключ слева направо протек заряд $3C\varepsilon$.

7. 1) Предмет находится в фокусе рассеивающей линзы. В этом случае линза создает мнимое и вдвое уменьшенное изображение на расстоянии вдвое меньше фокусного, т.е. на расстояние 5 см от себя.

2) Так как итоговое изображение получается в натуральную величину, собирающая линза должна давать изображение с двукратным увеличением. Поэтому расстояние от первого изображения до второй линзы равно 15 см, а расстояние между линзами составляет 10 см.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. На полностью погруженную в ртуть корону действуют направленные вниз внешняя сила $F = 6$ Н и сила тяжести $P = 21$ Н, которые уравниваются направленной вверх силой Архимеда, равной $\rho_0 Vg$, где ρ_0 – плотность ртути, V – объем короны, g – ускорение свободного падения:

$$P + F = \rho_0 Vg.$$

Вес короны в воздухе равен

$$P = \rho Vg,$$

где ρ – плотность материала короны. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{P}{P + F} = \frac{\rho}{\rho_0}, \text{ или } \rho = \rho_0 \frac{P}{P + F}.$$

Подставив численные значения величин, найдем

$$\rho = 10,5 \text{ г/см}^3.$$

Следовательно, корона сделана из *серебра*.

2. Мощность плитки вначале равна

$$P_0 = \frac{U^2}{R},$$

где U – напряжение сети, R – сопротивление плитки. После включения дополнительного сопротивления r в цепи течет ток

$$I = \frac{U}{R + r},$$

а плитка выделяет мощность

$$P_1 = I^2 R = \left(\frac{U}{R + r} \right)^2 R.$$

По условию задачи $P_0/P_1 = 4$. Значит,

$$4 = \frac{P_0}{P_1} = \frac{U^2}{R} \frac{(R + r)^2}{U^2 R} = \left(\frac{R + r}{R} \right)^2,$$

или

$$\frac{R + r}{R} = 2, \text{ и } r = R.$$

Таким образом,

$$r = R = \frac{U^2}{P_0} = 48,4 \text{ Ом}.$$

3. После удара о скат крыши мяч полетит строго вверх. Это вытекает из законов упругого удара (угол падения равен углу отражения) и того факта, что в момент удара скорость мяча была горизонтальной (угол падения равен 45°). Значит, в наивысшей точке траектории не только вертикальная, но и горизонтальная составляющие скорости мяча равны нулю. Следовательно, в этой точке кинетическая энергия мяча равна нулю, а потенциальная равна mgh , где h – искомая высота подъема. Начальная энергия мяча равна $mv_0^2/2$. Применив закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh,$$

найдем

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

4. Обозначив давления газа в сосуде до и после налива воды, соответственно, p_0 (атмосферное давление) и p и введя сечение сосуда S , запишем закон Бойля–Мариотта:

$$p_0 HS = p(H - h)S.$$

После налива воды давление столба воды высотой y равно разности давления воздуха внутри сосуда и атмосферного давления:

$$p - p_0 = \rho gy.$$

Из двух приведенных уравнений найдем искомое атмосферное давление:

$$p_0 = \rho gy \frac{H - h}{h}.$$

5. Ясно, что максимальный заряд Q_2 на конденсаторе емкостью C_2 возникает в момент, когда ток через катушку равен нулю. (Действительно, если ток не равен нулю, то конденсатор либо заряжается, либо разряжается (в зависимости от направления тока), т.е. его заряд не максимален.) Значит, в этот момент энергия в катушке равна нулю. Таким образом, энергия первого конденсатора $Q_1^2/(2C_1)$ плюс энергия второго конденсатора $Q_2^2/(2C_2)$ равна начальной энергии системы $Q^2/(2C_1)$:

$$\frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}.$$

Кроме того, в соответствии с законом сохранения заряда,

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Исключив из этих двух уравнений Q_1 , получим

$$C_2 Q_2 (2Q - Q_2) = C_1 Q_2^2.$$

Решение $Q_2 = 0$ не соответствует максимальному заряду. Поэтому окончательно

$$Q_2 = \frac{2C_2}{C_1 + C_2} Q.$$

6. Дальность полета ядра l равна горизонтальной составляющей начальной скорости $v \cos \alpha$, умноженной на время полета $(2v \sin \alpha)/g$, где α – угол вылета ядра. Дальность максимальна при $\alpha = 45^\circ$ и равна

$$l = \frac{v^2}{g}.$$

На высоких широтах и на экваторе энергия броска, а значит, и начальная скорость v одинаковы. А вот ускорения свободного падения на высоких широтах g_1 и на экваторе g_2 различаются на величину ускорения тела на экваторе, связанного с суточным вращением Земли и равного $\omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения Земли, R – радиус Земли:

$$g_2 \sim g_1 - \omega^2 R.$$

Следовательно, искомое повышение результата равно

$$\Delta l = l_2 - l_1 = \frac{v^2}{g_2} - \frac{v^2}{g_1} \sim \frac{v^2}{g_1 - \omega^2 R} - \frac{v^2}{g_1} = \frac{v^2 \omega^2 R}{g_1 (g_1 - \omega^2 R)} = l_1 \frac{\omega^2 R}{g_2}.$$

Подставив сюда $\omega = 2\pi/T$, где $T = 24 \cdot 60 \cdot 60$ с – период обращения Земли (сутки), $l_1 \sim 25$ м, $g_2 = 10$ м/с², $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, получим $\Delta l \sim 10$ см.

Можно учесть также и дополнительный выигрыш, обусловленным несферичностью формы Земли. Однако, этот выигрыш меньше.

7. Если витки намотаны на цилиндр в одну сторону, он может опускаться без проскальзывания, т.е. «катиться» по нитям. При различных направлениях намотки витков цилиндр для опускания непременно должен проскальзывать, поскольку при перемещении цилиндра вниз нить в одной из петель должна двигаться по часовой стрелке, а в другой петле – против. Так как этого не происходит, сил трения достаточно, чтобы удержать цилиндр.

Вариант 2

1. Корабль всплывает, когда архимедова сила F_A , действующая на все шарики, уравнивает вес корабля в воде P и

суммарную силу тяжести F_T , действующую на все шарики:

$$F_A = P + F_T, \text{ или } \rho g V N = P + mgN.$$

Отсюда находим искомое число шариков:

$$N = \frac{P}{\rho g V - mg} = 100000.$$

2. Пусть ЭДС батареи равна \mathcal{E} . Обозначим $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом. Напряжение на конденсаторе до замыкания ключа было

$$U_1 = \mathcal{E}.$$

После замыкания ключа и окончания переходного процесса оно стало

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}.$$

Искомое отношение зарядов равно отношению напряжений:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3},$$

т.е. заряд на конденсаторе уменьшится в 3 раза.

3. Найдем сначала расстояние l , которое пролетает бомба по горизонтали. Поскольку время падения бомбы с высоты h равно $t = \sqrt{2h/g}$, а горизонтальная скорость бомбы равна v , то

$$l = vt = v \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Пусть O – проекция на землю (по вертикали) центра окружности, по которой летает бомбардировщик, A – проекция на землю точки, из которой была выпущена бомба, B – точка приземления бомбы. Тогда $OA = R$, $AB = l$, а OB равно искомому радиусу окружности, в которую попадают бомбы. Так как отрезок AB направлен по касательной к окружности, то угол OAB прямой. Следовательно, искомый радиус равен

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + l^2} = \sqrt{R^2 + \frac{2hv^2}{g}}.$$

4. Запишем закон Бойля–Мариотта для состояний газа в левой части сосуда до и после налива жидкости:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1, \text{ где } V_0 = Lbh.$$

Давление газа p_1 уравнивается средним давлением жидкости, которое изменяется от p_0 сверху до $p_0 + \rho gh$ на дне:

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho gh}{2}.$$

Объем налитой воды, очевидно, равен

$$V = 2V_0 - V_1.$$

Отсюда, с учетом предыдущих равенств, получим ответ:

$$V = Lbh \frac{p_0 + \rho gh}{p_0 + \rho gh/2}.$$

5. Введем коэффициент пропорциональности α между индукцией магнитного поля и временем: $B = \alpha t$. Тогда возникающая ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = lH\alpha,$$

где l – ширина рамки. Пусть полное сопротивление рамки и переключки равно R . Закон Ома для этой цепи запишется в виде

$$\mathcal{E} = IR,$$

где I – ток в цепи. Пока переключка неподвижна, ток постоянен, а значит, постоянна и выделяемая мощность. Следовательно, количество теплоты, выделившееся за время t до отрыва переключки от подставок, равно

$$Q = I^2 R t.$$

Согласно закону Ампера, на переключку действует сила

$$F = IlB = Il\alpha t.$$

В момент отрыва переключки

$$F = mg.$$

Окончательно получим

$$Q = mgH.$$

6. Здесь имеют место два эффекта: уменьшение с высотой силы тяжести mg из-за уменьшения ускорения g и уменьшение архимедовой силы $F_A = \rho g V$ (V – объем ведра) из-за уменьшения плотности воздуха ρ . Первый эффект уменьшает показания весов, второй увеличивает.

Ускорение свободного падения на высоте h равно

$$g' = g \frac{R_3^2}{(R_3 + h)^2},$$

где R_3 – радиус Земли. При $h = 25$ м и $R_3 = 6400$ км относительное изменение веса равно

$$\frac{\Delta P_1}{P} = \frac{g' - g}{g} \approx -\frac{2h}{R_3} \approx -8 \cdot 10^{-6}.$$

Уменьшение архимедовой силы равно $\Delta F_A = \Delta \rho g V$, где

$\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$. Из уравнения состояния

$$pV = \frac{m}{M} RT, \text{ или } \rho = \frac{pM}{RT},$$

следует

$$\Delta p = \frac{\Delta p M}{RT} \approx -\frac{\rho g h M}{RT} = -\rho \frac{h}{H},$$

где $H = RT/(Mg) \approx 9 \text{ км}$ – характерная высота атмосферы. Изменение веса в этом случае равно

$$\frac{\Delta P_2}{P} = -\frac{\Delta F_A}{\rho_0 V g} \approx \frac{\rho h}{\rho_0 H} \approx 4 \cdot 10^{-6},$$

где $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды.

Суммарное изменение веса равно

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P_1}{P} + \frac{\Delta P_2}{P} \approx -4 \cdot 10^{-6}.$$

При массе воды 10 кг получаем

$$\Delta P \approx -4 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

7. При нагревании в кипятке воздух в шприцах расширяется и частично выходит из них. Давление внутри шприцев одинаково и примерно равно атмосферному. Однако в первом шприце это давление создается нагретым воздухом, а во втором – суммой парциального давления нагретого воздуха и давления насыщенного пара, которое при температуре кипятка сравнимо с атмосферным (при 100 °С оно равно атмосферному). Следовательно, во втором шприце парциальное давление воздуха, а значит и количество молей оставшегося воздуха, значительно меньше, чем в первом. При охлаждении воздух сжимается, а пар конденсируется. Давление равно атмосферному, поэтому объем, занятый воздухом после охлаждения, пропорционален количеству оставшихся молей воздуха, а остальной объем шприца заполняется водой. Вот почему уровень воды во втором шприце существенно выше, чем в первом.

Вариант 3

1. Начальная горизонтальная составляющая скорости камня равна

$$v_x = \frac{L}{t} = 20 \text{ м/с},$$

а вертикальная составляющая –

$$v_y = \frac{gt}{2} = 15 \text{ м/с}.$$

Таким образом, начальная скорость камня равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 25 \text{ м/с}.$$

2. а) См. рис.59; коэффициент линейного увеличения равен $\Gamma = 2$, причем изображение действительное.

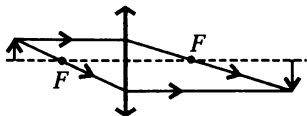


Рис. 59

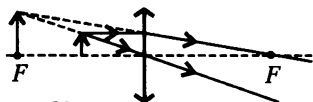


Рис. 60

б) См. рис.60; $\Gamma = 2$, причем изображение мнимое.

3. Запишем условия равновесия поршня в двух состояниях:

$$Sp_1 = Sp_0 + Mg,$$

$$Sp_2 = Sp_0 - Mg,$$

где p_1 , p_2 , – давления газа в стакане в двух состояниях, p_0 – внешнее давление воздуха. Умножим первое уравнение на l , второе – на L , поделим одно уравнение на другое и учтем закон Бойля–Мариотта $Slp_1 = SLp_2$. В результате получим

$$\frac{(Sp_0 + Mg)l}{(Sp_0 - Mg)L} = 1,$$

откуда найдем искомое внешнее давление:

$$p_0 = \frac{Mg}{S} \frac{L + l}{L - l}.$$

4. Сила со стороны магнитного поля не имеет вертикальной составляющей и поэтому не влияет на движение заряженного тела по вертикали. В таком случае время нахождения тела в полете будет таким же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$\tau = \frac{2v \sin \alpha}{g}.$$

В горизонтальной плоскости тело движется по окружности с постоянной угловой скоростью. Так как сила тяжести не имеет горизонтальной составляющей, движение тела в горизонтальной плоскости такое же, как и в отсутствие силы тяжести. Чтобы найти угловую скорость ω , заметим, что центростремительное ускорение $a = \omega^2 r = \omega v$ создается силой Лоренца $F_L = qBv_x$, где v_x – горизонтальная составляющая скорости тела, r – радиус

окружности. Таким образом,

$$m\omega v_x = qBv_x,$$

откуда

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Условие попадания в начальную точку через n оборотов по окружности дает

$$\omega t = 2\pi n.$$

Подставив сюда ω и t из предыдущих уравнений, найдем

$$q = \pm \pi \frac{mg}{Bv \sin \alpha} n,$$

где n – натуральное число.

5. После торможения на автомобиль действуют сила трения со стороны дороги, равная $2\mu(M+m)g$, и сила трения со стороны движущегося груза, равная μmg . В результате автомобиль движется с ускорением

$$a_1 = \frac{2\mu(M+m)g}{M} - \frac{\mu mg}{M} = \mu g \frac{2M+m}{M}.$$

На груз же действует сила трения μmg , и он движется с ускорением

$$a_2 = \mu g.$$

Видно, что $a_1 > a_2$. Поскольку начальные скорости автомобиля и груза равны, это неравенство означает, что автомобиль остановится раньше груза. Следовательно, груз *сместится* относительно автомобиля.

Автомобиль до остановки пройдет расстояние

$$L = \frac{v^2}{2a_1}.$$

Груз же до полной остановки пройдет расстояние

$$l = \frac{v^2}{2a_2}.$$

Искомое смещение груза относительно автомобиля будет равно

$$x = l - L = \frac{v^2}{2\mu g} \frac{M+m}{2M+m}.$$

6. Мощность лампы, рассеивающаяся в виде излучения, равна ηW , где W – ее полная мощность, а η – КПД. Энергия типичного кванта излучения видимого света равна $h\nu$, где

$v = c/\lambda$, а λ – средняя длина волны видимого света ($\lambda = 0,5$ мкм). Искомая скорость излучения фотонов, т.е. число испускаемых квантов в секунду, есть

$$n = \frac{\eta W}{h\nu} = \frac{\eta W\lambda}{hc}.$$

Приняв $W = 40$ Вт и $\eta = 10\%$, найдем

$$n \approx 10^{19} \text{ с}^{-1}.$$

7. До налива воды у левой боковой грани сосуда происходит главным образом преломление, и лишь малая часть падающего пучка отражается от внутренней и внешней поверхностей этой грани, давая слабое световое пятно на экране \mathcal{E}_2 . Большая же часть пучка попадает на экран \mathcal{E}_1 , где наблюдается яркое пятно.

После налива воды у левой боковой грани сосуда происходит полное внутреннее отражение. Убедимся, что это действительно так (рис.61). Взяв для оценки показатель преломления воды и стекла $n = 1,4$ и угол падения на переднюю грань $\alpha = 45^\circ$, найдем угол преломления на передней грани: $\beta = \arcsin((\sin \alpha)/n) \approx 30^\circ$.

Угол падения на левую грань сосуда равен $90^\circ - \beta \approx 60^\circ$, что существенно больше угла полного внутреннего отражения, равного $\arcsin(1/n) \approx 45^\circ$. В результате весь световой пучок отражается от левой грани, и пятно на экране \mathcal{E}_1 исчезает. Преломившись далее на смежной дальней грани сосуда, световой пучок попадает на экран \mathcal{E}_2 , давая яркое световое пятно.

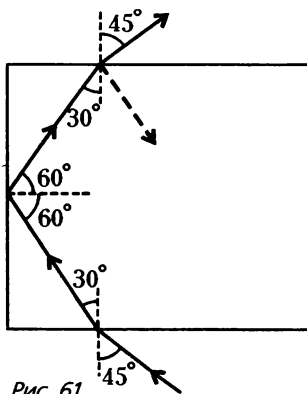


Рис. 61

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Ответы

| | В1 | В2 | В3 | В4 | В5 | В6 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Вариант 1 | 400 км | 910 Н | 6400 км | 4 кг·м/с | 960 Дж | 7 |
| Вариант 2 | 5 м | 70 кг | 84% | 3 | 10 см | 640 К |

| | В7 | В8 | В9 | В10 | В11 | В12 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Вариант 1 | 80 Вт | 105 В/м | 42 Дж | 20 мДж | 30° | 17 |
| Вариант 2 | 56% | 8 г | 100 Ом | 175 | 240 см | 450 нм |

| | С1 | С2 | С3 | С4 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Вариант 1 | 4 | 6% | 2 | 3 |
| Вариант 2 | 7 | 12% | 200 В | 628 мс |

Избранные решения

Вариант 1

С1. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Подставляя $u_1 = v_1/5$, получим

$$\frac{24}{25} m_1 v_1^2 = m_2 u_2^2,$$

$$\frac{6}{5} m_1 v_1 = m_2 u_2.$$

Возведя второе уравнение в квадрат и поделив его почленно на первое, найдем

$$m_1 = \frac{2}{3} m_2 = 4 \text{ кг}.$$

С2. Исходя из уравнения Менделеева–Клапейрона, найдем температуры в состояниях 2 и 3:

$$T_2 = 4T_1, \quad T_3 = 1,3T_2 = 5,2T_1.$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2) = 7,5 \nu R T_1.$$

Работа за цикл равна площади соответствующего треугольника в координатах (p, V) :

$$A = \frac{1}{2} (4p_1 - p_1) (1,3V_1 - V_1) = 0,45 p_1 V_1 = 0,45 \nu R T_1.$$

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{0,45}{7,5} = 0,06 = 6\%.$$

С3. Заряды частиц равны, а масса второй частицы (ион атома гелия) в 4 раза больше, чем масса первой (протон). Запишем для каждой частицы второй закон Ньютона для движения по окружности:

$$qv_1B = \frac{m_1v_1^2}{R_1}, \quad qv_2B = \frac{m_2v_2^2}{R_2}$$

и закон сохранения энергии:

$$qU = \frac{m_1v_1^2}{2}, \quad qU = \frac{m_2v_2^2}{2}.$$

Из законов Ньютона выразим отношение радиусов:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2v_2}{m_1v_1},$$

а из законов сохранения энергии – отношение скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Окончательно получим

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = 2.$$

С4. Равнодействующую силы тяжести и кулоновской силы обозначим как силу тяжести с новым ускорением свободного падения:

$$mg + qE = mg'.$$

Частота колебаний в отсутствие электрического поля была

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

а после включения поля стала

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g'}{l}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{1 + \frac{qE}{mg}} = 3.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. 2. 105. 3. -3. 4. 2. 5. $(0; 1) \cup (1; 2)$. 6. $1/4$.
7. $-\arctg 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 8. $-1/2$. 9. 2. 10. -1. 11. $(1; 2]$. 12. 495.
13. $31/32$. 14. $(1; 2]$. 15. $2\pi/3$. 16. $[-1; 1]$. 17. $1/\sqrt{2}$. 18. 21; 75.
19. $32\pi/3; 128\pi/3$. 20. $(-\infty; 1/2]$.

Вариант 2

1. а. 2. 4. 3. -1. 4. -2; 3. 5. $[-1; +\infty)$. 6. 4. 7. $1/3$; 3.
8. $k\pi/2, k \in \mathbb{Z}$. 9. $3/4$. 10. $1/6$. 11. -4. 12. $(1; 2]$. 13. $y = x^2 + 1$.
14. $[1; 2)$. 15. $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi; \pi + 2l\pi\right), k, l \in \mathbb{Z}$. 16. $1/3$. 17. 1.
18. 13. 19. 1. 20. 1.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. А). 2. Б). 3. Б). 4. Д). 5. Г). 6. В). 7. Г). 8. Б). 9. А).
10. Д). 11. $v_{\text{ср}} = 50$ км/ч. 12. $R = 125$ м. 13. $F_{\text{ср}} = 120$ кН.
14. $F = 200$ Н. 15. $\Delta x = 4$ см. 16. $p_1 = 12$ кПа. 17. $\varphi_2 = 81\%$.
18. $E = \sqrt{2} \frac{q}{\pi \epsilon_0 a^2}$. 19. $R_2 = 10$ Ом. 20. $l = 35$ см.

Вариант 2

1. Г). 2. Д). 3. Б). 4. В). 5. Г). 6. А). 7. В). 8. Д). 9. Е).
10. Б). 11. $v_0 = 0,5$ м/с. 12. $F_{\text{min}} = \frac{2mgh \operatorname{tg} \alpha}{l \cos \alpha}$. 13. $u = 5,3$ м/с.
14. 7 раз. 15. CH_4 . 16. $m = 0,2$ кг. 17. $a = 10$ см. 18. $P_1 = 9$ Вт.
19. $v_{\text{уст}} = \frac{mg R \sin \alpha}{(Bl)^2}$. 20. $\gamma = \pi - \alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{m}$.

Приложение к журналу «Квант» №6/2009

Экзаменационные материалы по математике и физике

Составители *А.А.Егоров, С.А.Дориченко, В.А.Тихомирова*

Редакторы *А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 102

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 6,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 2469.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru.

E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества

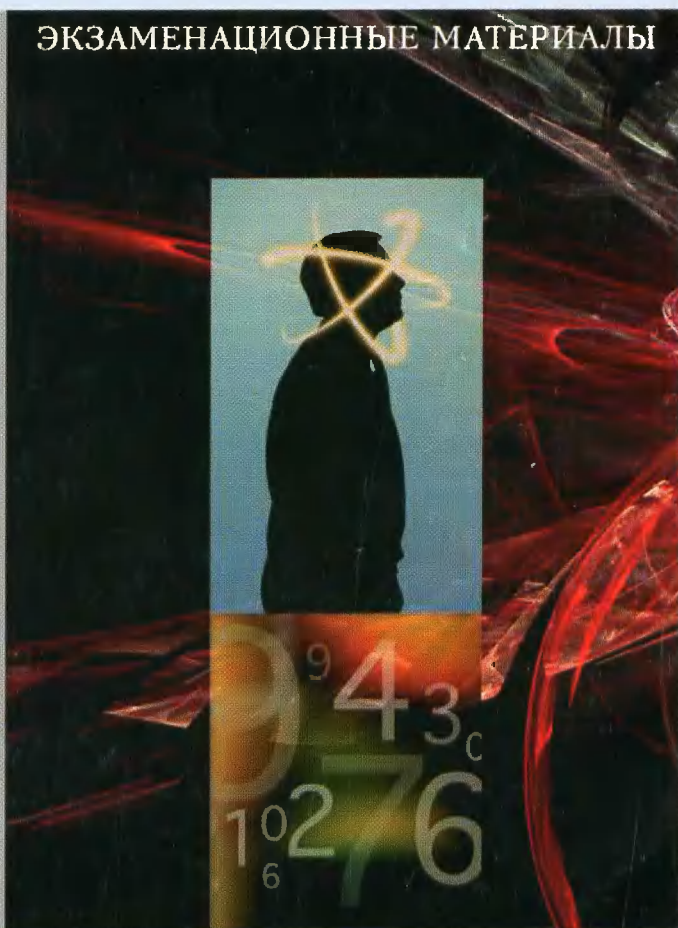
37. *Г.С.Воронов*. Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин*. Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев*. Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич*. Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский*. Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов*. Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов*. Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский*. Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь*. α , β , γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин*. Пузыри
47. *Л.С.Марочник*. Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов*. Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов*. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис*. Физика в ванне
52. *В.М.Липунов*. В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин*. Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин*. Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов*. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров*. Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин*. Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази*. Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин*. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский*. Геометрия масс
62. *Р.Фейнман*. Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов*. Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров*. Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман*. КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов*. Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков*. Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева*. Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко*. Физика полета
71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков*. Математические бильярды

78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Смординский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

Индекс 70465



ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№6/2009